2019年度後期中間試験問題・基礎数学Ⅲ（D1）

注意：(1) 答のみの問題で，問題番号を囲む括弧は数式上必要な括弧を兼ねていない。例えば $x^2+2x-3=(\ 1\ )(x-1)$ となっていたら $(\ 1\ )$ の正解は $(x+3)$ であり，$((\ 1\ ))(x-1)$ となっていたら正解は $x+3$ である。また，不必要な括弧をつけた解答も減点もしくは 0 点とする。

(2) $\dfrac{b}{a}$ を b/a と表すことがある。自然数全体の集合を $\mathbb{N}$，整数全体の集合を $\mathbb{Z}$ と表す。

1．次の問いに答えよ。ただし，答のみ。(25点)

(1) 次の漸化式で表わされる数列の第 5 項を求めよ。ただし，$k\in\mathbb{N}$ である。

[1] $a_1=3,\ a_{k+1}=a_k+3k$　　[2] $a_1=1,\ a_{k+1}=a_k{}^2+2$

(2) 次の計算の [　] に入る最も適切な答えを解答用紙に書け。ただし，$n,k\in\mathbb{N}$ である。

(ここから) 漸化式 $a_1=4,\ a_{k+1}=a_k+(9k+4)$ で表わされる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求める。

$b_k=a_{k+1}-a_k$ とすれば $b_k=[\ 1\ ]$ であり，$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{[\ 2\ ]}b_k=a_1+\sum_{k=1}^{[\ 2\ ]}[\ 1\ ]$ $(n\geqq[\ 3\ ])$

ここで $\sum_{k=1}^{[\ 2\ ]}[\ 1\ ]=\dfrac{1}{2}(n-1)([\ 4\ ])$ だから $a_n=\dfrac{1}{2}n([\ 5\ ])$ これは $n=1$ のときも成り立つ。

(ここまで)

(3) 次の式を展開せよ。

[1] $(x-1)^5$　　[2] $(a+1)^6$

(4) 次の和を求めよ。

[1] $\sum_{m=1}^{3}m\cdot 2^{m-1}$　　[2] $\sum_{j=1}^{6}(j+1)^2$

(5) 次の数列の和を $\sum$ 記号を用いて表わせ。

[1] $1-1+1-1+1-1+\cdots$ （第 n 項までの和）

[2] $1+3+5+\cdots+11$ （初項 1，公差 2 の等差数列の和）

(6) 次の和を求めよ。(因数分解したものを答えよ)

[1] $\sum_{k=1}^{n}k(k+1)+\sum_{k=1}^{n}k(k-2)$　　[2] $2\cdot1+4\cdot3+\cdots+2n(2n-1)$

(7) 次の計算の [　] に入る最も適切な答えを解答用紙に書け。

(ここから) 漸化式 $a_1=3,\ a_{k+1}=7a_k-5$ $(k\in\mathbb{N})$ で定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求める。

$a_{k+1}=7a_k-5$ を $a_{k+1}-a=7(a_k-a)$ と変形すれば $a=[\ 1\ ]$ である。

そこで $b_n=a_n-[\ 1\ ]$ とすれば $b_1=[\ 2\ ],\ b_{k+1}=[\ 3\ ]b_k$ だから $b_n=[\ 4\ ]$ となる。従って

$a_n=\dfrac{[\ 5\ ]}{6}$ (ここまで)

2．次の問いに答えよ。ただし，答のみ。(25点)

(1) トランプ 52 枚をよく切って 1 枚を抜くとき，事象 A：カードの数字が 10 以下，B：カードの数字が偶数，C：カードがダイヤとするとき，次の確率の値を求めよ。なお，絵札の J, Q, K はそれ

ぞれ 11,12,13 とし，エースは 1 とする。

[1] $P(A)$　[2] $P(B)$　[3] $P(C)$　[4] $P(A\cap B)$　[5] $P(B\cap C)$

[6] $P(C\cap A)$　[7] $P(A\cup B)$　[8] $P(B\cup C)$　[9] $P(C\cup A)$

[10] $P(A\cap B\cap C)$　[11] $P(A\cup B\cup C)$

(2) 1 から 10 までの番号のついた 10 枚のカードから同時に 2 枚のカードを取り出し，大きい数字から小さい数字を引いた数を x とする。このとき，次の値を求めよ。

[1] $x=k\ (1\leqq k\leqq 9)$ となる確率　[2] x の期待値 (平均)

(3) 2 個のさいころを同時に投げるとき，次の値を求めよ。

[1] 目の和が $k\ (2\leqq k\leqq 7)$ となる確率　[2] 目の和が $k\ (8\leqq k\leqq 12)$ となる確率

(4) 20 本のくじの中に，当たりくじが 4 本ある。3 本を同時に引くとき，少なくとも 1 本当たる確率を求めよ。

(5) 3 個のさいころを同時に投げるとき，次の値を求めよ。

[1] 偶数の目が 2 個，奇数の目が 1 個となる確率

[2] 出る目の和が 15 以上になる確率

3. 数列 $a_n=n^2-n\ (n\in\mathbb{N})$ のとき，次を求めよ。なお，因数分解したものを答えよ。ただし，(1) は答のみ。(6点)

(1) a_{3k-2}　(2) $a_1+a_4+a_7+\cdots+a_{3n-2}$

4. $(x+y+2)^6$ を展開した式について，次の問いに答えよ。ただし，答のみ。(6点)

(1) 同類項をまとめるといくつの項があるか。例えば $(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$ だから 3 項である。

(2) 次の項の係数を求めよ。

[1] x^5　[2] x^4y　[3] x^3y^2　[4] x^2y^3

5. 漸化式 $a_1=1,\ a_{k+1}=a_k+3k\ (k\in\mathbb{N})$ で表わされる数列 $\{a_n\}$ の一般項が

$a_n=\dfrac{3n^2-3n+2}{2}$ であることを，次の方法で証明せよ。なお，指示に従わない証明には点を与えない。(10点)

(1) 階差数列を用いて直接証明する　(2) 数学的帰納法を用いて証明する

6. 初項から第 n 項までの和を S_n とおくとき，$\dfrac{S_5}{S_{10}}=-\dfrac{1}{242}$ となる等比数列の公比 r の値を求めよ。なお，r は実数とする。ただし，答のみ。(3点)

7．n 枚の硬貨がある。$n \geqq 3$ として次の問いに答えよ。なお，表と裏が出る確率は同じ $\dfrac{1}{2}$ とする。
ただし，答のみ。(14点)　(東京大・改)

(1) これらの硬貨を同時に投げたとき，ちょうど 2 枚だけが他の $(n-2)$ 枚と異なる結果（表か裏か）となる確率 q を求めよ。

(2) これらの硬貨を同時に投げることを繰り返し，ちょうど 2 枚だけが他の $(n-2)$ 枚と異なる結果になった時点で終了する。ちょうど k 回で終了する確率 p_k を求めよ。

(3) (2) において，k 回以内に終了する確率を求めよ。

(4) p_k を (2) で求めたものとし，$S_N = \sum_{k=1}^{N} k \cdot p_k$ とする。次の計算の [　] に入る最も適切な答えを解答用紙に書け。

(ここから)　q を (1) で求めたものとし，$r = 1 - q$ と表わせば

$S_N - rS_N = q\left(\sum_{k=1}^{N} r^{k-1} - N[\ 1\ ] \right)$ … ①，等比数列の和の公式から $\sum_{k=1}^{N} r^{k-1} = [\ 2\ ]$ である

からこれを①に代入すれば $S_N - rS_N = 1 - ([\ 3\ ]) \cdot [\ 1\ ]$ となる。N を限りなく大きくしていくと

$([\ 3\ ]) \cdot [\ 1\ ]$ の値は限りなく 0 に近づくことが知られているので，(2) において終了するまでにかかる回数の期待値は限りなく [4] に近づく。(ここまで)

8．$P(A)P(B) \geqq a^2$ $(a>0)$ のとき，$P(A \cap B) \geqq \max\{2a-1, 0\}$ が成り立つことを証明せよ。なお，$\max\{2a-1, 0\} = \begin{cases} 2a-1 & (a \geqq 1/2) \\ 0 & (a < 1/2) \end{cases}$ である。(5点)

9．A, B, C がある試験に合格する確率がそれぞれ a, b, c であるとき，次の確率を求めよ。なお，それぞれが合格する事象は互いに独立とする。ただし，答のみ。(6点)

(1) 1 人だけが合格する確率　　(2) 少なくとも 1 人合格する確率

(3) 2 人だけが合格する確率