2019年度学年末試験問題・微分積分Ⅱ（C2） [redacted]

注意： 答のみの問題で，問題番号を囲む括弧は数式上必要な括弧を兼ねていない。例えば $x^2+2x-3=(\ 1\ )(x-1)$ となっていたら $(\ 1\ )$ の正解は $(x+3)$ であり，$((\ 1\ ))(x-1)$ となっていたら正解は $x+3$ である。また，不必要な括弧をつけた解答も減点もしくは 0 点とする。

1. 次の不定積分を求めよ。なお，積分定数は省略してもよい。ただし，答のみ。(25点)

(1) $\displaystyle\int \frac{dx}{8-x^2}$　(2) $\displaystyle\int \sqrt{6-x^2}\,dx$　(3) $\displaystyle\int \sqrt{x^2+9}\,dx$

(4) $\displaystyle\int \sin 4x \sin 5x\,dx$　(5) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x}$　(6) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4}$　(7) $\displaystyle\int \frac{dx}{x}$

(8) $\displaystyle\int \cos\frac{x}{4}\,dx$　(9) $\displaystyle\int (9x+5)^9\,dx$　(10) $\displaystyle\int \sec^2 x\,dx$

(11) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-9}}$　(12) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2}}$　(13) $\displaystyle\int \frac{x^2-7}{x^2+3}\,dx$

(14) $\displaystyle\int e^{4x}\cos 3x\,dx$

2. 次の問いに答えよ。ただし，答のみ。(25点)

(1) 次の広義積分の値を求めよ。

[1] $\displaystyle\int_3^{\infty} \frac{dx}{x^4}$　[2] $\displaystyle\int_0^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$

(2) 数直線上を運動する点 P の時刻 t における速度が $v=2\sin p t$ のとき，$t=1$ から $t=2$ の間に点 P が移動した距離を求めよ。

(3) 曲線 $x=\tan t,\ y=\sin t+1\ \left(0 \leqq t \leqq \dfrac{p}{4}\right)$ と3直線 $x=0,\ x=1,\ y=0$ で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

(4) 曲線 $x=3t^2,\ y=3t-t^3\ \left(0 \leqq t \leqq \sqrt{3}\right)$ の長さ l を求めよ。

(5) 楕円 $x=8\cos t,\ y=\sin t\ \left(0 \leqq t \leqq 2p\right)$ に関する次の計算の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙に書け。なお，$x'=\dfrac{dx}{dt},\ y'=\dfrac{dy}{dt}$ とする。また解答に絶対値は使わないこと。

(ここから) $x'=[\ 1\ ]$ だから，この楕円で囲まれた図形の面積 S は対称性から
$S=4\displaystyle\int_0^{[\ 2\ ]}[\ 3\ ]\,dt=[\ 4\ ]$ となる。また，この楕円を x 軸のまわりに回転してできる回転体の体積 V_x は対称性から $V_x=2p\displaystyle\int_0^{[\ 2\ ]}[\ 5\ ]\,dt=[\ 6\ ]$ となる。この楕円を y 軸のまわりに回転してできる回転体の体積 V_y は同様にして値を求めると $[\ 7\ ]$ である。(ここまで)

(6) 次の極座標をもつ点の直交座標を求めよ。

[1] $\left(3,\ \dfrac{p}{2}\right)$　[2] $\left(4,\ \dfrac{4}{3}p\right)$

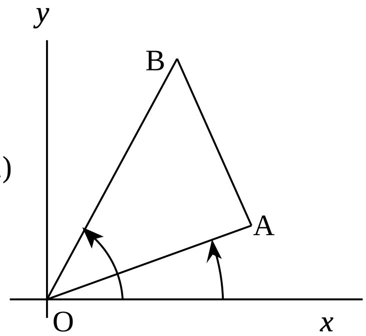
(7) 次の直交座標をもつ点の極座標 $(r,\ q)$ を求めよ。ただし，$0 \leqq q < 2p$ とせよ。

[1] $\left(-3,\ -\sqrt{3}\right)$　[2] $(-2,\ 2)$

(8) 極座標による曲線 $r = |\cos 2q|$ $(0 \leqq q \leqq 2p)$ で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

(9) 極座標による曲線 $r = e^{2q}$ $(0 \leqq q \leqq p)$ の長さ l を求めよ。

3. 図の2点 A, B の極座標がそれぞれ $(r_1,\ q_1)$，$(r_2,\ q_2)$ 直交座標がそれぞれ $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$ であるとき，次の計算の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙に書け。ただし，答のみ。(6点)



(ここから) 三角形 OAB の面積 S を A, B の極座標を用いて表わすと $S = \dfrac{1}{2} r_1 r_2 (\ 1\ )$ となる。ただし，$0 \leqq q_1 < q_2 < p$ とする。

$(\ 1\ ) = (\ 2\ ) - \cos q_2 \sin q_1$ だから $S = \dfrac{1}{2}\left((\ 3\ ) - r_2 \cos q_2 \cdot r_1 \sin q_1\right)$ … ①

①を A, B の直交座標を用いて表わすと $S = (\ 4\ )$ となる。(ここまで)

4. ある種の細菌を培養すると，その細菌の数 $N(t)$ の増加率 $\dfrac{dN}{dt}$ は現在の数に比例するという。比例定数を $k > 0$ として次の問いに答えよ。ただし，$N(0) = N_0$ とする。(11点)

(1) $N(t)$ の微分方程式を答えよ。ただし，答のみ。

(2) (1)の微分方程式を解け。

(3) この細菌は最初から4時間後では1万個，最初から6時間後には4万個になったとする。k と N_0 の値を求めよ。ただし，k の値は1時間を単位として求めよ。

5. $I = \displaystyle\int \dfrac{dx}{2 + \cos x}$ を求める次の計算の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙に書け。なお，(　) は t の式，[　] は x の式が入る。ただし，答のみ。(8点)

(ここから) $t = \tan\dfrac{x}{2}$ と置換すれば $\cos x = (\ 1\ )$，$dx = (\ 2\ )dt$ となり $\dfrac{1}{2 + \cos x} = \dfrac{1 + t^2}{(\ 3\ )}$

となる。従って $I = \displaystyle\int (\ 4\ ) dt = (\ 5\ )$，$t$ を元に戻せば $I = [\ 6\ ]$ (ここまで)

6. 次の極限値を求めよ。ただし，(1)は答のみ。(6点)

(1) $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{n^2 + kn}}$　(2) $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{2kn - k^2}}$

7. 曲線 $y = x^3$ $(|x| \leqq a)$ を x 軸のまわりに回転してできる回転面の面積 S を求めよ。なお，a は正定数で，側面のみを考えよ。(6点)

8. 次の記述の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙に書け。ただし，答のみ。(7点)

(ここから) $f(x)=x-\sin x\ \left(0\leqq x\leqq 1\right)$ とすれば $f'(x)=(\ 1\ )\geqq 0$ だから $f(x)$ は単調増加関数となり $\sin x\leqq x$ となる。従って $0\leqq x\leqq 1$ で $0\leqq \sin x\leqq x$ … ① である。この不等式を用いれば

$$\sqrt{(\ 2\ )}\leqq\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2 x}\leqq 1 \quad \therefore \int_0^1 dx<\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2 x}}<\boxed{\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{(\ 2\ )}}} \quad \cdots ②$$

②の $\boxed{}$ の積分において $x=\sqrt{2}\sin q\ \left(|q|\leqq p/2\right)$ と置換すれば $dx=(\ 3\ )dq$,

$\sqrt{(\ 2\ )}=(\ 4\ )$ $\left(\sqrt{}\right.$ のない式$\left.\right)$ だから $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{(\ 2\ )}}=\int_0^{(\ 5\ )}(\ 6\ )dq\ =(\ 7\ )$

従って②から $\displaystyle 1<\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2 x}}<(\ 7\ )$ (ここまで)

9. $\displaystyle I=\int_0^1\frac{x^4}{\sqrt{x-x^2}}dx$ の値を求めよ。(6点)