2019年度後期中間試験問題・微分積分Ⅱ（C2）

注意：(1) 答のみの問題で，問題番号を囲む括弧は数式上必要な括弧を兼ねていない。例えば $x^2+2x-3=(\ 1\ )(x-1)$ となっていたら $(\ 1\ )$ の正解は $(x+3)$ であり，$((\ 1\ ))(x-1)$ となっていたら正解は $x+3$ である。また，不必要な括弧をつけた解答も減点もしくは 0 点とする。

(2) $\dfrac{b}{a}$ を b/a と表すことがある。$\exp x=e^x$ である。自然数全体の集合を $\mathbb{N}$ と表す。

1． 次の定積分の値を求めよ。ただし，答のみ。(21点)

(1) $\displaystyle\int_2^3 \sqrt{x^2+2x-8}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$

(3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{4\cosh^2(x/2)}$ (双曲線関数)　　(4) $\displaystyle\int_0^{p/4} \cos^4 x\sin x\,dx$

(5) $\displaystyle\int_1^2 (x+3)e^x\,dx$　　(6) $\displaystyle\int_0^p (x+1)\sin x\,dx$　　(7) $\displaystyle\int_0^{1/\sqrt{2}} \sqrt{1-x^2}\,dx$

(8) $\displaystyle\int_0^p \sin^7\frac{x}{2}\,dx$　　(9) $\displaystyle\int_0^{p/2} \cos^8 x\,dx$　　(10) $\displaystyle\int_1^e x^4\log x\,dx$

(11) $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\log 2x}$

2． 次の不定積分を求めよ。なお，積分定数は省略してもよい。ただし，答のみ。(23点)

(1) $\displaystyle\int \frac{dx}{9-x^2}$　　(2) $\displaystyle\int \sqrt{x^2+2}\,dx$　　(3) $\displaystyle\int \sin^5 x\,dx$

(4) $\displaystyle\int \frac{e^x-1}{2e^x-2x-1}\,dx$　　(5) $\displaystyle\int \frac{2}{1+\sin 2x+\cos 2x}\,dx$（Hint：2倍角の公式）

(6) $\displaystyle\int \sqrt{\cos x+2}\cdot\sin x\,dx$　　(7) $\displaystyle\int xe^{-x}dx$　　(8) $\displaystyle\int x^2\cos 4x\,dx$

(9) $\displaystyle\int \frac{(x+1)^2}{x^2+1}\,dx$　　(10) $\displaystyle\int \frac{dx}{1-8x^2}$　　(11) $\displaystyle\int \sin 2x\sin 9x\,dx$

(12) $\displaystyle\int e^{3x}\sin 7x\,dx$

3． 次の問いに答えよ。ただし，答のみ。(6点)

(1) 曲線 $y=\sqrt{(x-1)^3}$ $(14/9\leqq x\leqq 23/3)$ の長さを求めよ。

(2) 半径 r の直円柱がある。この円柱を，底面の直径 AB を通り底面と q の角をなす平面で切るとき，底面と平面の間の部分の体積を求めよ。ただし，$0<q<p/2$ とする。

(3) 曲線 $y=\cos x$ $(0\leqq x\leqq p/2)$ と x 軸，y 軸で囲まれた図形を x 軸のまわりに回転してできる回転体の体積を求めよ。

4．$I=\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sin^2 x}$ を求める次の計算の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙に書け。なお，(1)~(4) は t のみの式，(5) は x のみの式が入る。ただし，答のみ。(6点)

(ここから) $t=\tan x$ と置換すると $dx=(\ 1\ )dt$，$1+\sin^2 x=\dfrac{(\ 2\ )}{t^2+1}$ となるので

$I=\displaystyle\int (\ 3\ )dt=(\ 4\ )$，$t$ を元に戻して $I=(\ 5\ )$ (ここまで)

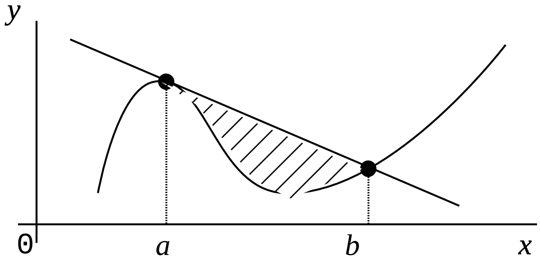
5．$I_n=\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{\left(a^2-x^2\right)^n}}$ $\left(a>0,\ |x|<a,\ n\in\mathbb{N}\right)$ とするとき，次の問いに答えよ。

なお，積分定数は省略する。ただし，(1),(2) は答のみ。(12点)

(1) I_1 を求めよ。　　(2) I_2 を求めよ。

(3) $I_{n+2}=\dfrac{1}{na^2}\left\{\dfrac{x}{\sqrt{\left(a^2-x^2\right)^n}}+(n-1)I_n\right\}$ を証明せよ。

6．3次曲線 $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ (a>0)$ とその接線で囲まれた図形の面積は，接点の x 座標を a，接線とこの曲線との交点の x 座標を b とするとき，$\dfrac{1}{12}a\left(b-a\right)^4$ となることを証明せよ。ただし，$a\neq b$ とする。(7点)



7．$I=\displaystyle\int \frac{x}{x^3-1}dx$ を求める次の計算の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙に書け。なお，(　) は式，[　] は数値が入る。ただし，答のみ。(13点)

(ここから) $\dfrac{x}{x^3-1}$ を部分分数に分解すると

$\dfrac{x}{x^3-1}=\dfrac{[\ 1\ ]}{x-1}+\dfrac{[\ 3\ ]x+[\ 4\ ]}{x^2+(\ 2\ )}$，$\displaystyle\int \frac{[\ 1\ ]}{x-1}dx=(\ 5\ )$

$\displaystyle\int \frac{[\ 3\ ]x+[\ 4\ ]}{x^2+(\ 2\ )}dx=\int \frac{[\ 3\ ]((\ 6\ ))+[\ 7\ ]}{((\ 6\ ))^2+3/4}dx$，$\displaystyle\int \frac{[\ 3\ ]((\ 6\ ))}{((\ 6\ ))^2+3/4}dx=(\ 8\ )$

$\displaystyle\int \frac{[\ 7\ ]}{((\ 6\ ))^2+3/4}dx=(\ 9\ )$，以上より $I=\dfrac{1}{6}\log(\ 10\ )+(\ 9\ )$ (ここまで)

8．次の不定積分を求めよ。(12点)

(1) $\displaystyle\int \frac{7x^2+12x+2}{(x-2)(x+1)^3}dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{\left(x^2+2\right)^2}$