2019年度前期末試験問題・微分積分Ⅰ（C2）

注意：

（1）答のみの問題で，問題番号を囲む括弧は数式上必要な括弧を兼ねていない。例えば $x^2+2x-3=(\ 1\ )(x-1)$ となっていたら $(\ 1\ )$ の正解は $(x+3)$ であり，$((\ 1\ ))(x-1)$ となっていたら正解は $x+3$ である。また，不必要な括弧をつけた解答も減点もしくは 0 点とする。

1．次の各問いに答えよ。ただし，答のみ。(25点)

（1）次の媒介変数で表される曲線上の（　）内の t の値に対応する点における接線の方程式を求めよ。

[1] $x=4\sin 2t,\ y=2\sin 3t\ \left(t=\frac{p}{3}\right)$　　[2] $x=t^2-1,\ y=1-2t^3\ \ (t=-1)$

（2）x 軸上の動点 P は原点を出発してから t 秒後の x 座標が $x=t^3-6t^2+9t$ である。このとき次の問いに答えよ。

[1] 2秒後の点 P の {1} 速度　{2} 加速度 を求めよ。

[2] 点 P は運動の向きを２度変える。それは何秒後と何秒後か。

（3）次の関数の第２次導関数を求めよ。なお，解答には $y''=$ と書かなくてよい。

[1] $y=\sin^2 x$　　[2] $y=\dfrac{1}{1+x}$　　[3] $y=\log|2x-1|$

（4）次の関数の第 n $(n\geqq 1)$ 次導関数を求めよ。なお，解答には $y^{(n)}=$ と書かなくてよい。

[1] $y=e^{1-x}$　　[2] $y=\log|1-x|$

（5）$y=e^x\sin x$ の第４次導関数を求める次の計算の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙に書け。(ここから) k を 0 以上の整数とすれば，$(e^x)^{(k)}=[\ 1\ ],\ (\sin x)^{(k)}=\sin(x+[\ 2\ ])$ だから Leibniz の公式から

$$\left(e^x\sin x\right)^{(4)}=\sum_{k=0}^{4}[\ 3\ ](e^x)^{(k)}(\sin x)^{([\ 4\ ])}=\sum_{k=0}^{4}[\ 3\ ][\ 1\ ]\sin(x+[\ 5\ ])\ \cdots\ ①$$

①を計算してまとめると $\left(e^x\sin x\right)^{(4)}=[\ 6\ ]$ (ここまで)

2．次の各問いに答えよ。ただし，答のみ。(25点)

（1）次の曲線の曲線の変曲点の座標を求めよ。　[1] $y=3x^4-4x^3$　　[2] $y=\dfrac{1}{x^2+3}$

（2）次の計算の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙に書け。

(ここから) $y=x^3-6x^2+9x$ について $y'=[\ 1\ ],\ y''=[\ 2\ ]$ だから $x=[\ 3\ ]$ のとき $y'=0$，$x=[\ 4\ ]$ のとき $y''=0$ となる。増減表を作ると

x	…	[5]	…	[6]	…	[7]	…
y'	[8]	0	[9]	[9]	[9]	0	[8]
y''	[10]	[10]	[10]	0	[11]	[11]	[11]
y	[12]	[13]	[14]	[15]	[16]	[17]	[18]

従って極大値 $y=[\ 19\ ]$，極小値 $y=[\ 20\ ]$，変曲点の座標は [21] となる。(ここまで)

3. 曲線 $y=x^3+1$ 上の点 $\mathrm{P}\left(t,\ t^3+1\right)$ $(t>-1,\ t\neq 0)$ における接線と x 軸との交点を Q とし，P から x 軸に垂線を引き，x 軸との交点を R とするとき，次の問いに答えよ。(15点)

(1) 次の計算の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙に書け。ただし，答のみ。

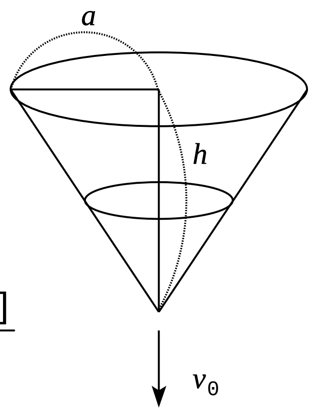
(ここから) P における接線の傾きは [1] だから P における接線の方程式は

$y=[\ 1\ ]x+[\ 2\ ]$，よって Q の座標は $([\ 3\ ],0)$ なので QR$=[\ 4\ ]$ $(\because t>-1,\ t\neq 0)$

以上より ⊿PQR の面積を $f(t)$ とすれば $f(t)=[\ 5\ ]$ (ここまで)

(2) $f(t)$ の極値とそれを与える t の値を求めよ。

4. 上面の半径が a，高さが $h>0$ の直円錐の容器に水が満たしてある。下端から毎秒 v_0 の割合で水を排出するとき，次の問いに答えよ。なお，$a,\ h,\ v_0$ は正の定数とする。(10点)



(1) 次の計算の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙に書け。ただし，答のみ。 (ここから) t 秒後の水面の高さを x とする。このとき残っている水の体積を x の式で表すと [1] だから排出された水の体積は $\dfrac{[\ 2\ ]}{3h^2}$

これが $v_0 t$ に等しいからその関係式より $x^3=\dfrac{h^2}{pa^2}([\ 3\ ])$ となる。 (ここまで)

(2) $x=\dfrac{h}{2}$ のときの $\dfrac{dx}{dt}$ を求めよ。

5. 次の極限値を求めよ。(9点)

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{\cos x}{x\sin x}\right)$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(e^{2x}+3x\right)^{1/x}$ $\left(1/x=\dfrac{1}{x}\ \text{である}\right)$

6. $y=\sqrt{1+x}$ について，次の計算の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙に書け。なお，$1!!=1,\ 3!!=1\cdot 3,\ 5!!=1\cdot 3\cdot 5$ などと定義する。ただし，答のみ。(12点)

(ここから) $y'=(\ 1\ )$ より $(1+x)y'=(\ 2\ )y$ … ①，①の両辺を $(n-1)$ 回微分すると

$(1+x)y^{(n)}+((\ 3\ ))y^{(n-1)}=(\ 2\ )y^{(n-1)}$ $\therefore$ $(1+x)y^{(n)}+((\ 4\ ))y^{(n-1)}=0$ … ②

②に $x=0$ を代入し $a_n=y^{(n)}(0)$ と表せば，$a_n=(\ 5\ )a_{n-1}=((\ 5\ ))\cdot((\ 6\ ))a_{n-2}$

$\therefore\ a_n=\dfrac{(-1)^{(\ 7\ )}((\ 8\ ))!!}{2^{(\ 7\ )}}$，ところで $5!!=1\cdot 3\cdot 5=\dfrac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{2\cdot 4}=\dfrac{5!}{2^2\cdot 2!}$ と変形できるので $((\ 8\ ))!!=\dfrac{((\ 8\ ))!}{2^{(\ 9\ )}\cdot((\ 10\ ))!}$，これを用いれば $a_n=\dfrac{(-1)^{(\ 7\ )}((\ 8\ ))!}{2^{(\ 11\ )}\cdot((\ 10\ ))!}$ (ここまで)

7. $x=\dfrac{1}{t-1}$, $y=\dfrac{1}{t+1}$ のとき，次のものを t の式で表せ。ただし，答のみ。(4点)

(1) $\dfrac{dy}{dx}$　　(2) $\dfrac{d^2y}{dx^2}$

クラス C2 番号　　　氏名

1(1)[1] 2点	
1(1)[2] 2点	
1(2)[1]{1} 1点	1(2)[1]{2} 1点
1(2)[2] 1点	
1(3)[1] 2点	
1(3)[2] 2点	
1(3)[3] 2点	
1(4)[1] 2点	
1(4)[2] 2点	
1(5)[1] 1点	1(5)[2] 1点
1(5)[3] 1点	
1(5)[4] 1点	
1(5)[5] 2点	
1(5)[6] 2点	

2(1)[1] 2点	
2(1)[2] 2点	
2(2)[1] 1点	2(2)[2] 1点
2(2)[3] 1点	2(2)[4] 1点
2(2)[5] 1点	2(2)[6] 1点
2(2)[7] 1点	2(2)[8] 1点
2(2)[9] 1点	2(2)[10] 1点
2(2)[11] 1点	2(2)[12] 1点
2(2)[13] 1点	2(2)[14] 1点
2(2)[15] 1点	2(2)[16] 1点
2(2)[17] 1点	2(2)[18] 1点
2(2)[19] 1点	2(2)[20] 1点
2(2)[21] 1点	

3(1)[1] 1点

3(1)[2] 1点

3(1)[3] 1点

3(1)[4] 2点

3(1)[5] 2点

3(2) 8点

4(1)[1] 2点

4(1)[2] 2点

4(1)[3] 2点

4(2) 4点

5(1) 4点

5(2) 5点

6(1) 1点

6(2) 1点

6(3) 1点

6(4) 1点

6(5) 1点

6(6) 1点

6(7) 1点

6(8) 1点

6(9) 1点

6(10) 1点

6(11) 2点

7(1) 1点

7(2) 3点