2019年度前期中間試験問題・微分積分Ⅰ（C2）

注意： 答のみの問題で，問題番号を囲む括弧は数式上必要な括弧を兼ねていない。例えば $x^2+2x-3=(\ 1\ )(x-1)$ となっていたら $(\ 1\ )$ の正解は $(x+3)$ であり，$((\ 1\ ))(x-1)$ となっていたら正解は $x+3$ である。また，不必要な括弧をつけた解答も減点もしくは 0 点とする。

注意： $\dfrac{b}{a}$ を b/a と表すことがある。また，$\exp x=e^x$ である。

1．次の関数を微分せよ。なお，解答には $y'=$ と書かなくてもよい。また，分数式は通分した規約分数式を答えよ。ただし，答のみ。(46点)

(1) $y=\left(3x^2-2\right)^6$　(2) $y=\dfrac{1}{\left(x^7-x\right)^7}$　(3) $y=\sqrt[3]{\left(x^2+x\right)^2}$

(4) $y=\dfrac{1}{1+\cos x}$　(5) $y=\cos^3 x$　(6) $y=\sqrt{\sin 3x}$

(7) $y=\exp\left(\cos^2 x\right)$　(8) $y=\log\left(x^2+x+1\right)$　(9) $y=\sin x\log(\cos x)$

(10) $y=\log\dfrac{(x+1)^2}{x(x-1)}$ $(x>1)$　(11) $y=\log\left(\sqrt[3]{x^2+1}\sqrt{x^3}\right)$

(12) $y=\left(\sqrt{2}x-3\right)^{\sqrt{2}}$　(13) $y=\log\left|x^2-1\right|$

(14) $y=\log_3\left((x-4)\sqrt{x^2+3}\right)$　(15) $y=\sin^{-1}3x$　(16) $y=\cos^{-1}x^2$

(17) $y=3^{2x+3}$　(18) $y=\cos(5x-1)$　(19) $y=x^2\sin 4x$

(20) $y=e^{3x+2}$　(21) $y=-x^4+\dfrac{x^2+3}{4}$　(22) $y=(x+1)(x-1)$

(23) $y=\left(x^2+x+1\right)(2x+1)$　(24) $y=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$　(25) $y=(x+1)\left(x^2-x+1\right)$

(26) $y=\dfrac{3x-1}{x^2-5}$　(27) $y=\left(1-x^2\right)(2x-3)(x+2)$　(28) $y=\dfrac{x^{-2}}{4}+\dfrac{5}{6x^3}$

2．次の値を求めよ。ただし，答のみ。(4点)

(1) $\cos^{-1}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$　(2) $\sin^{-1}(-1)$　(3) $\tan^{-1}\left(\tan\dfrac{2p}{3}\right)$

(4) $\log\dfrac{1}{\sqrt{e}}$

3．次の計算の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙に書け。なお，a, b は定数で [　] は数値が入る。ただし，答のみ。(6点)

(ここから) $\displaystyle\lim_{x\to -1}\frac{ax^2+bx+6}{x^2-x-2}=2$ が成り立つとき分母を因数分解すると $x^2-x-2=(\ 1\ )$ なので $\displaystyle\lim_{x\to -1}\left(x^2-x-2\right)=0$ だから極限値が存在するためには $b=(\ 2\ )\cdots$ ① このとき

$$\lim_{x\to -1}\frac{ax^2+bx+6}{x^2-x-2}=\lim_{x\to -1}\frac{ax^2+(\ 2\ )x+6}{(\ 1\ )}=\lim_{x\to -1}\frac{(\ 3\ )}{(\ 1\ )}=(\ 4\ )=2\ \therefore a=[\ 5\ ]$$

$\left((\ 3\ )\right.$ は $ax^2+(\ 2\ )x+6$ を因数分解したもの$\left.\right)$ これを①に代入して $b=[\ 6\ ]$ (ここまで)

4. 関数 $f(x)=\begin{cases}\sin(x+a) & (x\leqq 0)\\ \dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3x+3}}{x} & (x>0)\end{cases}$ が $x=0$ で連続であるとき，a の値を求めよ。

なお，a は定数で $-\dfrac{p}{2}\leqq a\leqq\dfrac{p}{2}$ とする。(6点)

5. 次の計算の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙に書け。なお，[　　] は数値が入る。ただし，答のみ。(13点) (新潟大・改)

(ここから) $y=x^2\sqrt{\dfrac{1+x^2}{1-x^2}}$ $(|x|<1)$ の両辺の自然対数をとれば

$\log y=2\log(\ 1\ )+[\ 2\ ]\log(1+x^2)-[\ 2\ ]\log(1-x^2)$ となる。この両辺を x で微分すれば，左辺 $=(\ 3\ )\dfrac{dy}{dx}$，右辺は $\dfrac{d}{dx}(2\log(\ 1\ ))=(\ 4\ )$，$\dfrac{d}{dx}\left([\ 2\ ]\log(1+x^2)\right)=(\ 5\ )$

$\dfrac{d}{dx}\left(-[\ 2\ ]\log(1-x^2)\right)=(\ 6\ )$ だから右辺を計算すると $(\ 4\ )+(\ 5\ )+(\ 6\ )=(\ 7\ )$

$\left((\ 7\ )\right.$ は通分したもの$\left.\right)$ 以上より $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{(\ 7\ )}{(\ 3\ )}=2x(1+x^2)^{[\ 8\ ]}(1-x^2)^{[\ 9\ ]}((\ 10\ ))$

$\left((\ 10\ )\right.$ は整式$\left.\right)$，$(\ 10\ )=\left([\ 11\ ]-x^2\right)\left(x^2+[\ 12\ ]\right)$ から $x>0\Leftrightarrow\dfrac{dy}{dx}>0$ (ここまで)

6. 次の極限値を求めよ。(8点)

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\exp ax-\exp bx}{x}$ $(a, b:0$ でない定数$)$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{3^x-2^x}{x}$

7. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{6}$ であることが知られている。これを用いて関数

$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sin 3x}-\dfrac{1}{3x} & (x\neq 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$ の $x=0$ における微分係数 $f'(0)$ の値を求めよ。(4点)

(金沢大・改)

Hint: 定義にしたがって $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$ を計算せよ。このとき $x\neq 0$ であることに注目せよ。

8. 実数 x に対して記号 $[x]$ をGauss記号といい，x を超えない最大の整数を表す。例えば $[\sqrt{2}]=1$, $[p]=3$, $\left[-\dfrac{3}{2}\right]=-2$, $[3]=3$ である。次の問いに答えよ。ただし，答のみ。(8点)

(1) $y=[x]$ のグラフを $-2 \leqq x < 3$ の範囲でかけ。なお，• はその点が入り，◦ は入らないとする。

(2) 次の極限値を求めよ。

[1] $\displaystyle\lim_{x \to -\sqrt{2}} [x]$　[2] $\displaystyle\lim_{x \to 2+0} [x]$　[3] $\displaystyle\lim_{x \to 2-0} [x]$　[4] $\displaystyle\lim_{x \to 2} [x]$

[5] $\displaystyle\lim_{x \to n-0} [x]$　（n：整数）

9. 方程式 $e^x - x = 2$ は，少なくとも１つの実数解をもつことを中間値の定理を用いて証明せよ。(5点)

Hint： $e > 2$ である。