

Jordan 標準形

$$r \text{ 次の正方行列 } \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & \alpha & 1 & \ddots & \vdots \\ & & \alpha & \ddots & 0 \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \alpha \end{pmatrix} \text{ を記号で } J_r(\alpha) \text{ と表し、} r \text{ 次の Jordan 細胞と}$$

いう。つまり $J_r(\alpha)$ は対角成分がすべて α でその他は $(i, i+1)$ 成分のみ 1 であとは 0 の r 次の上三角行列である。

$$\text{例: } J_1(\alpha) = (\alpha), \quad J_2(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}, \quad J_3(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

$J_r(\alpha)$ の固有多項式は $(\lambda - \alpha)^r$ で、固有値は α だけである。またこのときの固有ベクトルは $\mathbf{x} = c^t (1 \ 0 \ \cdots \ 0)$ だけである。ただし、 c は 0 でない任意の数。

$$\text{表現として例えば、} \begin{pmatrix} J_1(\alpha) & & \\ & J_2(\beta) & \\ & & J_3(\gamma) \end{pmatrix} \text{ とは } \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \text{ を表す。}$$

与えられた正方行列 A がどのような Jordan 細胞をいくつ使って表された上三角行列に変換されるかの議論はここではしない。Jordan 細胞を使って表された上のような行列を Jordan 標準形という。次のことが知られている。

任意の正方行列は正則な行列を用いて対角行列にすることができるか、または Jordan 標準形にすることができる。後者の場合、その正則行列に直交行列 (成分が複素数の場合はユニタリ行列) をとることができる。

$$\text{例題: } A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ を適当な正則行列を用いて Jordan 標準形に変換せよ。}$$

[解答] $\phi_A(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2 - \lambda - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + 1)^2 = 0 \quad \therefore \lambda = 1, -1$ (二重解) となる。

Jordan 標準形が、 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ となることが知られている。 $P = (\mathbf{p}_1 \ \mathbf{p}_2 \ \mathbf{p}_3)$ とすれば、

$\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ はそれぞれ固有値 $1, -1$ の固有ベクトルを取ればよい。最後に $A\mathbf{p}_3 = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3$ を解いて

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \therefore y=1, x-z=1 \text{ となるから例えば } x=1, y=1,$$

$z=0$ とすればよい。($\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$ が線形独立になるように決める)

(解終)

補足：上の例題の最後の $\mathbf{p}_3$ を決定するくだりは、ここではそうやるとうまくいくと考えればよい。標準形の一般的な求め方は相当な準備が必要であり、大学編入試験でもめったに出題されないし、出題されたとしても誘導問題となっているから **Jordan** 標準形に関する予備知識がなくても心配ない。

行列の指数関数

指数関数 e^x の **Maclaurin** 展開は

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k = 1 + \frac{1}{1!} x + \frac{1}{2!} x^2 + \cdots + \frac{1}{k!} x^k + \cdots \quad |x| < \infty$$

であった。(教科書 19 ページ) そこで 正方行列 A に対して A の指数関数を次の右辺で定義し、左辺の記号で表す。

$$\exp A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k \quad (A^0 = E : \text{単位行列}) \cdots (1)$$

初項は A がどのような正方行列でも E とする。そこで誤解のないように初項だけ別に書いて

$$\exp A = E + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$$

としておく間違いがない。なお、右辺の意味は級数の場合と同じで代数的な和ではなく第 N 部分和の極限である。即ち、

$$S_N = E + \sum_{k=1}^N \frac{1}{k!} A^k, \quad \exp A = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N \cdots (2)$$

さらに e^x の **Maclaurin** 展開が任意の実数 x に対して収束することが知られているので、(2) も任意の正方行列に対して収束することが知られている。なお、

行列の極限は各成分の極限となる。

これは厳密に言えば行列の標準的な内積(行列の積ではなく内積である!)を定義し、それから行列のノルム(大きさ)が自然に定義され、さらにこれから2つの同じ型の行列の距離が定義されることにより分かる事実である。参考までに同じ型の行列の標準内積の定義を紹介しておく。

$$A \bullet B = \text{tr}({}^t AB) = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ij} \right) \cdots (3)$$

ただし、 $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ は同じ $m \times n$ 行列である。

さて、 $\exp A$ のいくつかの性質について解説する。以下、行列の和や積を定義できる同じ次数の正方行列とする。

$$P \text{ が正則ならば, } \exp(P^{-1}AP) = P^{-1}(\exp A)P \cdots (4)$$

[証明] 自然数 k に対して $(P^{-1}AP)^k = (P^{-1}AP)(P^{-1}AP) \cdots (P^{-1}AP) = P^{-1}A^kP$ だから

$$S_N = E + \sum_{k=1}^N \frac{1}{k!} (P^{-1}AP)^k = E + \sum_{k=1}^N \frac{1}{k!} P^{-1}A^kP = P^{-1} \left(E + \sum_{k=1}^N \frac{1}{k!} A^k \right) P$$

$$\therefore \exp(P^{-1}AP) = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N = P^{-1} \left(\lim_{N \rightarrow \infty} \left(E + \sum_{k=1}^N \frac{1}{k!} A^k \right) \right) P = P^{-1}(\exp A)P \quad (\text{証終})$$

n 次の対角行列 $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ を記号で $\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ と表す。また,

$\text{diag}(\lambda, \lambda, \dots, \lambda) = \lambda E$ をスカラー行列ともいう。

$$A = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \text{ ならば, } \exp A = \text{diag}(e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, \dots, e^{\lambda_n}) \quad \dots (5)$$

$$A = \lambda E \text{ ならば } \exp A = e^{\lambda} E \quad \dots (6)$$

[証明] $A = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ ならば $A^k = \text{diag}(\lambda_1^k, \lambda_2^k, \dots, \lambda_n^k)$ だから

$$S_N = E + \sum_{k=1}^N \frac{1}{k!} \text{diag}(\lambda_1^k, \lambda_2^k, \dots, \lambda_n^k) = \text{diag} \left(1 + \sum_{k=1}^N \frac{1}{k!} \lambda_1^k, \dots, 1 + \sum_{k=1}^N \frac{1}{k!} \lambda_n^k \right)$$

$$\begin{aligned} \therefore \exp A &= \lim_{N \rightarrow \infty} S_N = \lim_{N \rightarrow \infty} \text{diag} \left(1 + \sum_{k=1}^N \frac{1}{k!} \lambda_1^k, \dots, 1 + \sum_{k=1}^N \frac{1}{k!} \lambda_n^k \right) \\ &= \text{diag} \left(\lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + \sum_{k=1}^N \frac{1}{k!} \lambda_1^k \right), \dots, \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + \sum_{k=1}^N \frac{1}{k!} \lambda_n^k \right) \right) = \text{diag}(e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, \dots, e^{\lambda_n}) \end{aligned}$$

$$A = \lambda E \text{ ならば } \exp A = \text{diag}(e^{\lambda}, \dots, e^{\lambda}) = e^{\lambda} E \quad (\text{証終})$$

例題: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ のとき、 $\exp A$ を求めよ。

[解] 固有値と固有ベクトルを求める。固有方程式は、 $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 9\lambda - 4 = 0 \Rightarrow \lambda = 4, 1$

(1は2重解) 固有ベクトルはそれぞれ $\lambda = 4 \Rightarrow \mathbf{p}_1 = {}^t(1 \ 1 \ 1), \lambda = 1 \Rightarrow$

$\mathbf{p}_2 = {}^t(1 \ 0 \ -1), \mathbf{p}_3 = {}^t(0 \ 1 \ -1)$ となり、 $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$ は線形独立だから対角化行列として

$$P = {}^t(\mathbf{p}_1 \ \mathbf{p}_2 \ \mathbf{p}_3) \text{ がとれる。このとき、} P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \text{diag}(4, 1, 1) \text{ より (5) から } \exp(P^{-1}AP) = \begin{pmatrix} e^4 & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}, \text{ 一方 (4) から}$$

$$\exp(P^{-1}AP) = P^{-1}(\exp A)P \quad \therefore \exp A = P(\exp(P^{-1}AP))P^{-1} = P \begin{pmatrix} e^4 & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} e^4 + 2e & e^4 - e & e^4 - e \\ e^4 - e & e^4 + 2e & e^4 - e \\ e^4 - e & e^4 - e & e^4 + 2e \end{pmatrix} \quad (\text{解終})$$

$$\underline{AB=BA} \text{ ならば, } \exp(A+B) = \exp A \exp B \cdots (7)$$

補足： $AB=BA$ が成り立つとき A と B は可換 (交換可能) であるという。このとき、次のことも知られている。

$$AB=BA \text{ ならば, 自然数 } k \text{ に対して } (A+B)^k = \sum_{l=0}^k {}^k C_l A^{k-l} B^l \cdots (8)$$

さらに 2 つの級数の積について次のことが知られている。

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k, \sum_{k=0}^{\infty} b_k$ の少なくとも一方が絶対収束するならば,

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^k a_{k-l} b_l \right) \cdots (9)$$

この級数を **Cauchy** の積級数という。

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ が絶対収束するとは $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ が収束することで、絶対収束する級数は収束することが知られている。(教科書 138 ページ)

さて、これらのことを用いて (7) を証明する。なお、 e^x の **Maclaurin** 展開は明らかに絶対収束することに注意する。

$$\begin{aligned} \text{[(7) の証明] } \exp A \exp B &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} B^k \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^k \frac{1}{(k-l)!} A^{k-l} \left(\frac{1}{l!} B^l \right) \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\sum_{l=0}^k \frac{k!}{(k-l)! l!} A^{k-l} B^l \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\sum_{l=0}^k {}^k C_l A^{k-l} B^l \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (A+B)^k \\ &= \exp(A+B) \quad (\text{証終}) \end{aligned}$$

$$(\exp A)^{-1} = \exp(-A) \cdots (10)$$

[証明] 明らかに $A(-A) = (-A)A = -A^2$ (可換) だから、(7) から

$$\exp A \exp(-A) = \exp(A-A) = \exp O = E \quad \therefore \exp(-A) = (\exp A)^{-1} \quad (\text{証終})$$

A が対角化不可能な場合は **Jordan** 標準形を用いる。この場合も一般論を展開することができるが、ここでは例題を解くに留める。その前に次のことを証明する。

$J_r(\alpha)$ を r 次の **Jordan** 細胞とすれば

$$\exp J_r(\alpha) = e^\alpha \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2!} & \cdots & \cdots & \frac{1}{(r-1)!} \\ & 1 & 1 & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & \ddots & \frac{1}{2!} \\ & & & & 1 & 1 \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \quad \cdots (11)$$

なる上三角行列のなる。

[証明] $J_r(\alpha) = \alpha E + B_r$ と表せる。ここで B_r は $(1, 2), (2, 3), \cdots, (r-1, r)$ 成分だけが 1 で、他の成分は 0 の上三角行列である。

$$B_r = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix} \quad \left(\text{例: } B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

このとき、 B_r^2 は $(1, 3), (2, 4), \cdots, (r-2, r)$ 成分だけが 1 で、他の成分は 0 の上三角行列と

$$\text{なる。} \quad \left(\text{例: } B_3^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

これを繰り返せば B_r^k ($1 \leq k \leq r-1$) は $(1, k+1), (2, k+2), \cdots, (r-k, r)$ 成分だけが 1 で、他の成分は 0 の上三角行列となり、 $k \geq r$ ならば $B_r^k = O$ となる。従って B_r^k は k が大きくなるにつれ斜めに続く 1 の成分が右上に移動していくから

$$\exp B_r = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} B_r^k = \sum_{k=0}^{r-1} \frac{1}{k!} B_r^k = E + \sum_{k=1}^{r-1} \frac{1}{k!} B_r^k = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2!} & \cdots & \cdots & \frac{1}{(r-1)!} \\ & 1 & 1 & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & \ddots & \frac{1}{2!} \\ & & & & 1 & 1 \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

また (6) から $\exp \alpha E = e^\alpha E$, さらに $(\alpha E)B_r = B_r(\alpha E) = \alpha B_r$ (可換) だから

$$\exp J_r(\alpha) = \exp(\alpha E + B_r) = \exp \alpha E \exp B_r = e^{\alpha} E \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2!} & \cdots & \cdots & \frac{1}{(r-1)!} \\ & 1 & 1 & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & \ddots & \frac{1}{2!} \\ & & & & 1 & 1 \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$= e^{\alpha} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2!} & \cdots & \cdots & \frac{1}{(r-1)!} \\ & 1 & 1 & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & \ddots & \frac{1}{2!} \\ & & & & 1 & 1 \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{証終})$$

例： $B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ のとき,

$$\begin{aligned} \exp B_3 &= E + \frac{1}{1!} B_3 + \frac{1}{2!} B_3^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} // \end{aligned}$$

例題： $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ のとき、 $\exp A$ を求めよ。

【解】 Jordan 標準形のところの例題ででてきた行列である。その結果から $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

とすれば、 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_1(1) & & \\ & J_2(-1) & \end{pmatrix}$ より

$$\exp(P^{-1}AP) = P^{-1}(\exp A)P \stackrel{\textcircled{1}}{=} \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & e^{-1} & e^{-1} \\ 0 & 0 & e^{-1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \therefore \exp A &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & e^{-1} & e^{-1} \\ 0 & 0 & e^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3e^{-1} - e & e - e^{-1} & e - 2e^{-1} \\ e^{-1} - e & e & e - e^{-1} \\ 2e^{-1} - e & e - e^{-1} & e - e^{-1} \end{pmatrix} \quad (\text{解終}) \end{aligned}$$

補足：①について。 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & \boxed{1} \\ 0 & \boxed{0} & \boxed{-1} \end{pmatrix}$ のようにブロックで分けると

$$\begin{pmatrix} J_1(1) & & \\ & J_2(-1) & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_1(1) & & \\ & J_2(-1) & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_1(1)^2 & & \\ & J_2(-1)^2 & \end{pmatrix}, \dots, \\ \begin{pmatrix} J_1(1) & & \\ & J_2(-1) & \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} J_1(1)^k & & \\ & J_2(-1)^k & \end{pmatrix}$$

な成り立つことは容易に確認できる。従って

$$\begin{aligned} \exp \begin{pmatrix} J_1(1) & & \\ & J_2(-1) & \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \exp J_1(1) & & \\ & \exp J_2(-1) & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & & \\ & e^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & e^{-1} & e^{-1} \\ 0 & 0 & e^{-1} \end{pmatrix} \quad // \end{aligned}$$

定数係数線形微分方程式と行列の指数関数

ここでは行列の指数関数を用いた定数係数連立線形微分方程式の解法を解説する。そのためにいくつかの準備をしていく。

A, B が同じ次数の正方行列で、成分が x の微分可能な関数であるとき

$$\frac{d}{dx}(AB) = \frac{dA}{dx}B + A\frac{dB}{dx} \quad \cdots (1)$$

補足：行列の微分は各成分を微分する。これは行列の指数関数のところで説明した行列の標準内積の定義から自然と定まる距離の定義から明らかなこと。

[(1) の証明] $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ で n 次とする。 $AB = \left(\sum_{p=1}^n a_{ip} b_{pj} \right)$ だから

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(AB) &= \left(\frac{d}{dx} \sum_{p=1}^n a_{ip} b_{pj} \right) = \left(\sum_{p=1}^n (a_{ip})' b_{pj} + \sum_{p=1}^n a_{ip} (b_{pj})' \right) \\ &= \left(\sum_{p=1}^n (a_{ip})' b_{pj} \right) + \left(\sum_{p=1}^n a_{ip} (b_{pj})' \right) = \frac{dA}{dx} B + A \frac{dB}{dx} \quad (\text{証終})\end{aligned}$$

補足： A のすべての成分が定数のとき，変数 x に対して $\frac{d}{dx}(xA) = A$ は明らかである。なお， x は数であるから，行列 A との積は必ず xA と書き，決して Ax と書かないこと！

A がすべての成分が定数の正方行列のとき

$$\frac{d}{dx} \exp(xA) = A \exp(xA) = \exp(xA) A \quad \cdots (2)$$

[証明] 項別微分可能であることを用いる。

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \exp(xA) &= \frac{d}{dx} \left(E + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} (xA)^k \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} k x^{k-1} A^k \\ &\stackrel{\textcircled{1}}{=} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} x^{k-1} A^{k-1} \right) A = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k A^k \right) A = \exp(xA) A, \text{ また } \textcircled{1} \text{ は} \\ A \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} x^{k-1} A^{k-1} \right) \text{ でもあるので } \frac{d}{dx} \exp(xA) &= A \exp(xA) \text{ も示された。} (\text{証終})\end{aligned}$$

$y_1, \dots, y_n$ を x の未知関数， A をすべての成分が定数の n 次正方行列， $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ ，

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1(x) \\ \vdots \\ b_n(x) \end{pmatrix} \quad (\text{各 } b_i(x) \text{ は既知関数}) \text{ とするとき，}$$

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx} = A\mathbf{y} \quad \cdots (3)$$

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx} = A\mathbf{y} + \mathbf{b} \quad \cdots (4)$$

を考える。まず (3) について次のことが成り立つ。

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx} = A\mathbf{y} \text{ の一般解は } \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \quad (c_i \text{ は任意定数}) \text{ とするとき } \mathbf{y} = \exp(xA) \mathbf{c} \quad \cdots (5)$$

補足： 行列の型から $\exp(xA) \mathbf{c}$ と書き，決して $\mathbf{c} \exp(xA)$ と書かないこと！

[(5) の証明] 発見的方法で証明する。方程式は $\frac{d\mathbf{y}}{dx} - A\mathbf{y} = \mathbf{0}$ であり，この両辺に $\exp(-xA)$

を掛けると $\exp(-xA) \frac{d\mathbf{y}}{dx} - \exp(-xA) A\mathbf{y} = \mathbf{0} \cdots \textcircled{1}$ となる。 $\exp(-xA) = \exp(x(-A))$

だから、(2) から $\frac{d}{dx} \exp(-xA) = -\exp(-xA) A$ となる。従って①は

$$\exp(-xA) \frac{d\mathbf{y}}{dx} + \left(\frac{d}{dx} \exp(-xA) \right) \mathbf{y} = \mathbf{0}, \quad (1) \text{ よりさらに変形され}$$

$$\frac{d}{dx} (\exp(-xA) \mathbf{y}) = \mathbf{0} \quad \therefore \exp(-xA) \mathbf{y} = \mathbf{c}$$

行列の指数関数の (10) から $(\exp(-xA))^{-1} = \exp(xA)$ だから $\mathbf{y} = \exp(xA) \mathbf{c}$ となる。(証終)
次に (4) について次のことが成り立つ。

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx} = A\mathbf{y} + \mathbf{b} \text{ の一般解は } \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \quad (c_i \text{ は任意定数}) \text{ とするとき}$$

$$\mathbf{y} = \exp(xA) \left(\int \exp(-xA) \mathbf{b} dx + \mathbf{c} \right) \cdots (6)$$

補足：(6) の右辺の積分は $\exp(-xA) \mathbf{b}$ の各成分を積分することで、各成分の積分から出てくる任意定数をまとめたものが $\mathbf{c}$ である。

[(6) の証明] ここでも Lagrange の定数変化法を用いる。(5) の $\mathbf{c}$ を、各成分が x の関数の

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1(x) \\ \vdots \\ u_n(x) \end{pmatrix} \text{ に置き換えた } \mathbf{y} = \exp(xA) \mathbf{u} \cdots \textcircled{1} \text{ を (4) に代入すると}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{y}}{dx} &= \frac{d}{dx} (\exp(xA) \mathbf{u}) = \left(\frac{d}{dx} \exp(xA) \right) \mathbf{u} + \exp(xA) \frac{d\mathbf{u}}{dx} \\ &= A \exp(xA) \mathbf{u} + \exp(xA) \frac{d\mathbf{u}}{dx} = A\mathbf{y} + \exp(xA) \frac{d\mathbf{u}}{dx} \end{aligned}$$

$$\text{だから } \exp(xA) \frac{d\mathbf{u}}{dx} = \mathbf{b} \Rightarrow \frac{d\mathbf{u}}{dx} = (\exp(xA))^{-1} \mathbf{b} = \exp(-xA) \mathbf{b}$$

$$\therefore \mathbf{u} = \int \exp(-xA) \mathbf{b} dx + \mathbf{c}, \text{ これを } \textcircled{1} \text{ に代入すれば}$$

$$\mathbf{y} = \exp(xA) \left(\int \exp(-xA) \mathbf{b} dx + \mathbf{c} \right) \quad (\text{証終})$$

例題： $\begin{cases} y_1' = 3y_1 + y_2 \\ y_2' = 3y_1 + 5y_2 \end{cases}$ を解け。

[解] $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ とすれば問題の方程式は $\frac{d\mathbf{y}}{dx} = A\mathbf{y}$ と表せる。 A は対角化可能で

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \text{ とすれば } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \text{diag}(2, 6) \text{ となる。}$$

(固有値, 固有ベクトルは各自で求めよ) 従って

$$\exp(xA) = \exp(P(x \text{diag}(2, 6))P^{-1}) = P \exp(x \text{diag}(2, 6))P^{-1} = P \text{diag}(e^{2x}, e^{6x})P^{-1}$$

($\because x \text{diag}(2, 6) = \text{diag}(2x, 6x)$ と, 行列の指数関数 (5) より)

$$\text{従って方程式の解は } \mathbf{y} = \exp(xA) \mathbf{c} = P \text{diag}(e^{2x}, e^{6x})P^{-1} \mathbf{c} = P \text{diag}(e^{2x}, e^{6x}) \mathbf{c}$$

($P^{-1} \mathbf{c}$ を改めて $\mathbf{c}$ とした)

$$\therefore \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2x} & 0 \\ 0 & e^{6x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{2x} + c_2 e^{6x} \\ -c_1 e^{2x} + 3c_2 e^{6x} \end{pmatrix} \quad (\text{解終})$$

$$\text{少し寄り道をしよう。} A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, xA = \begin{pmatrix} 0 & -x \\ x & 0 \end{pmatrix} \text{ のとき } \exp(xA) \text{ を求めてみよう。} A \text{ の固有}$$

値は $|A - \lambda E| = \lambda^2 + 1 = 0$ より $\lambda = \pm i$ (虚数) となる。成分が複素数の行列を考察対象にしてもよいのだが, ここでは A のべき乗を計算してその規則性から $\exp(xA)$ を計算してみる。

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -E, A^3 = -A, A^4 = (A^2)^2 = E, A^5 = A$$

つまり次のようになることが容易に分かる。

$$A^{2k+1} = (-1)^k A, A^{2k} = (-1)^k E \quad (k=0, 1, 2, \dots)$$

$\exp(xA)$ は先に指摘したように任意の実数 x に対して絶対収束するから, 部分和の順番を適当に入れ換えても同じものに収束することが知られている。そこで

$$C_N = E + \sum_{k=1}^N \frac{1}{(2k)!} (xA)^{2k} = E + \sum_{k=1}^N \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} E \quad (\because (xA)^{2k} = x^{2k} A^{2k} = (-1)^k x^{2k} E)$$

$$S_N = \sum_{k=0}^N \frac{1}{(2k+1)!} (xA)^{2k+1} = \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} A \quad (\text{上と同様な理由})$$

$$\text{また } \exp(xA) = \lim_{N \rightarrow \infty} (C_N + S_N) \text{ であり, } \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}, \sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} \text{ だから}$$

$$\exp(xA) = (\cos x)E + (\sin x)A = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix} \text{ となる。まとめると}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ のとき, } \exp(xA) = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix} \quad \cdots (7)$$

これでは計算しただけなので結果をもう少し吟味してみると興味深いことが分かる。上の計算で $A^2 = -E$ がでてきた。これにあることが思い起こされる。即ち虚数単位 i である。 $i^2 = -1$

つまりこの場合の A は i と同じ働きを持っているのではないかと さすれば $\exp(xA)$ は e^{ix} と同じよう
なものではないだろうか。ちなみに $e^{ix} = \cos x + i \sin x = 1 \cos x + i \sin x$ であつたが, これと

$$\exp(xA) = (\cos x)E + (\sin x)A$$

はよく似ていることが分かる。どうだろうか, これも数学の面白さである。

試しに $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $xA = \begin{pmatrix} 0 & x \\ x & 0 \end{pmatrix}$ のとき, $\exp(xA)$ を計算してご覧。このとき,

$$\cosh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad \sinh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

を用いるとききれいな結果が出てくる。

例題: $\begin{cases} y_1' = -y_2 + \sin x \\ y_2' = y_1 + \cos x \end{cases}$ を解け。

[解] $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とすれば問題の方程式は $\frac{d\mathbf{y}}{dx} = A\mathbf{y} + \mathbf{b}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}$

と表せる。この一般解は (6) から $\mathbf{y} = \exp(xA) \left(\int \exp(-xA) \mathbf{b} dx + \mathbf{c} \right)$ となり, 上の考察から

$$\exp(xA) = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}, \quad \exp(-xA) = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}$$

となるから

$$\begin{aligned} \int \exp(-xA) \mathbf{b} dx &= \int \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix} dx = \int \begin{pmatrix} 2 \sin x \cos x \\ \cos^2 x - \sin^2 x \end{pmatrix} dx \\ &= \int \begin{pmatrix} \sin 2x \\ \cos 2x \end{pmatrix} dx = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\cos 2x \\ \sin 2x \end{pmatrix}, \quad \text{従って } \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \text{ として} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\cos 2x \\ \sin 2x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\cos x \cos 2x - \sin x \sin 2x \\ -\sin x \cos 2x + \cos x \sin 2x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \cos x - c_2 \sin x \\ c_1 \sin x + c_2 \cos x \end{pmatrix} \quad (\text{加法定理}) \\ &= \begin{pmatrix} c_1 \cos x - c_2 \sin x - \frac{1}{2} \cos x \\ c_1 \sin x + c_2 \cos x + \frac{1}{2} \sin x \end{pmatrix} \quad (\text{解終}) \end{aligned}$$

最後に次のことを書いておく。

n 次正方行列 A が n 個の線形独立な固有ベクトル $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$ を持つならば

(つまり A は対角化可能) $\frac{d\mathbf{y}}{dx} = A\mathbf{y}$ の一般解は λ_k を $\mathbf{p}_k$ に対する A の固有値とすれば

$$\mathbf{y} = \sum_{k=1}^n c_k e^{\lambda_k x} \mathbf{p}_k = c_1 e^{\lambda_1 x} \mathbf{p}_1 + \dots + c_n e^{\lambda_n x} \mathbf{p}_n \quad \dots (8)$$

[証明] (5) から $P = (\mathbf{p}_1 \ \dots \ \mathbf{p}_n)$ とすれば

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= \exp(xA) \mathbf{c} = P \exp(x \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)) P^{-1} \mathbf{c} = P \operatorname{diag}(e^{\lambda_1 x}, \dots, e^{\lambda_n x}) \mathbf{c} \\ (P^{-1} \mathbf{c} \text{ を改めて } \mathbf{c} \text{ とした}) &= (\mathbf{p}_1 \ \dots \ \mathbf{p}_n)^t (c_1 e^{\lambda_1 x} \ \dots \ c_n e^{\lambda_n x}) = \sum_{k=1}^n c_k e^{\lambda_k x} \mathbf{p}_k \quad (\text{証終}) \end{aligned}$$

8 ~ 9 ページの例題の解をそのような視点で眺めると確かに (8) の形になっている。

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{2x} + c_2 e^{6x} \\ -c_1 e^{2x} + 3c_2 e^{6x} \end{pmatrix} = c_1 e^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{6x} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ で, } \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ はそれぞれ固有}$$
 値 $2, 6$ の固有ベクトルである。