ベクトル空間・部分空間・次元

○ 線形独立と線形従属

r 個のベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ に対して、

$$\alpha_1\boldsymbol{a}_1+\alpha_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+\alpha_r\boldsymbol{a}_r$$

を $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ の線形結合または1次結合という。ただし、$\alpha_i\,(i=1,2,\cdots,r)$ はスカラーである。また

$$\alpha_1\boldsymbol{a}_1+\alpha_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+\alpha_r\boldsymbol{a}_r=\boldsymbol{0}$$

を1次関係式という。

$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ の1次関係式 $\alpha_1\boldsymbol{a}_1+\alpha_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+\alpha_r\boldsymbol{a}_r=\boldsymbol{0}$ について

(i)　$\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_r=0$ 以外に1次関係式が成り立たない場合

　$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ は線形独立であるという。

(ii)　$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ のうち少なくとも１つは０でない値で1次関係式が成り立つ場合

　$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ は線形従属であるという。

線形結合との関連は次のようになる。

$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ は線形独立。

$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ のどのベクトルも残りのベクトルの線形結合で表せない。

$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ は線形従属。

$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ のうち少なくとも１つのベクトルが残りのベクトルの線形結合で表せる。

○ 部分空間

V をベクトル空間とする。V の空でない部分集合 W が次の条件を満たすとき、W を V の部分空間という。

（1）　$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2 \in W \Rightarrow \boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2 \in W$

（2）　α は任意のスカラー、$\boldsymbol{a} \in W \Rightarrow \alpha\boldsymbol{a} \in W$

（1），（2）は次と同値

$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r \in W \Rightarrow \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ の任意の線形結合は W の要素である。即ち

任意のスカラー $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ に対して、$\displaystyle\sum_{k=1}^{r}\alpha_k\boldsymbol{a}_k \in W$

例１：　R^3 の部分集合、$W_1=\{(x,y,z)\,|\,z=0\}$ は R^3 の部分空間である。⊿

例２：　R^3 の部分集合、$W_2=\{(x,y,z)\,|\,x+y+z=0\}$ は R^3 の部分空間である。⊿

いずれも証明してごらん。

○ 張られる空間、基底、次元

$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ をベクトル空間 V の要素、つまりベクトルとする。このとき $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ の線形結合全体を集めた集合は V の部分空間になる。（証明してごらん）この部分空間を $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ で生成される、または張られる空間といい、記号で $L\left[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r\right]$ または $\left\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r \right\rangle$ と表す。このとき、$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ を生成元という。即ち、

$$L\left[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r\right] = \left\{ \sum_{k=1}^{r} \alpha_k \boldsymbol{a}_k \,\middle|\, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r \text{ は任意のスカラー} \right\}$$

例３： $\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, 0), \boldsymbol{e}_2 = (0, 1, 0), \boldsymbol{e}_3 = (0, 0, 1)$ とすれば、$\mathrm{R}^3 = L\left[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\right]$ Δ

例４： $\boldsymbol{a}_1 = (1, 0, -1), \boldsymbol{a}_2 = (0, 1, -1)$ とすれば $L\left[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\right]$ は例２の W_2 である。Δ

確認してごらん。

ベクトル空間（または部分空間でもよい）V が $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ で生成されかつ $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ が線形独立であるとき、$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ をベクトル空間 V の基底という。V が有限個のベクトルで生成されるとき、その基底の個数は V に固有な値で一定であることが知られている。この個数を V の次元といい、記号で $dim\, V$ と表す。

例５： $dim\, \mathrm{R}^3 = 3$, $dim\, \mathrm{R}^n = n$ Δ

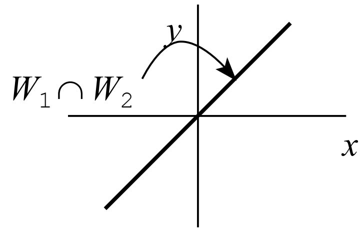
例６： 例２の W_2 は $dim\, W_2 = 2$ である。（確認してごらん）Δ

ベクトル空間が有限個のベクトルで生成されるとき、有限次元、そうでないとき無限次元であるという。

○ 共通部分・和空間・直和

ベクトル空間 V の２つの部分空間 W_1, W_2 に対して、集合としての共通部分 $W_1 \cap W_2$ は V の部分空間になる。（確認してごらん）これを W_1 と W_2 の共通部分といい、同じ記号 $W_1 \cap W_2$ で表す。

例７： 例１の W_1、例２の W_2 について、$W_1 \cap W_2$ は $z = 0$ かつ $x + y + z = 0$ だから、$x + y = 0$ という条件を満たす R^3 のベクトル (x, y, z) 全体だから、始点を原点とすれば終点が直線 $y = -x$ 上にあるベクトル全体となる。Δ



また W_1 に属する任意のベクトルと W_2 に属する任意のベクトルの和全体の集合はやはり V の部分空間になる。（確認してごらん）これを W_1 と W_2 の和空間といい、記号で $W_1 + W_2$ と表す。即ち

$$W_1 + W_2 = \left\{ \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2 \,\middle|\, \boldsymbol{w}_1 \in W_1, \ \boldsymbol{w}_2 \in W_2 \right\}$$

例８： 例１の W_1、例２の W_2 について、$W_1 + W_2 = \mathrm{R}^3$ になる。この証明はなれないとむずかしい。Δ

共通部分、和空間とそれぞれの部分空間の次元の関係として次の関係が成り立つ。これはとても大切な式であるから覚え、使えるようにすること。証明は省略する。

$$\boxed{dim\left(W_1 + W_2\right) = dim\, W_1 + dim\, W_2 - dim\left(W_1 \cap W_2\right)}$$

例９： 例１の W_1、例２の W_2 について、$dim\, W_1 = 2$, $dim\, W_2 = 2$, $dim\left(W_1 \cap W_2\right) = 1$ だから（確認してごらん） $dim\left(W_1 + W_2\right) = 2 + 2 - 1 = 3$ Δ

W_1 と W_2 の和空間でとくに共通部分の要素が零ベクトルだけのとき、つまり $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$ のとき、その和空間を直和といい、記号で $W_1 \oplus W_2$ と表す。

例１０： $W_1 = \{(x, y, z) \mid z = 0\}$, $W_3 = \{(x, y, z) \mid x = y = 0\}$ とすれば W_3 は R^3 の部分空間で $W_1 \cap W_3 = \{\mathbf{0}\}$ であり、$W_1 \oplus W_3 = \mathrm{R}^3$ となる。（確認してごらん）$\varDelta$

例１１： $W_2 = \{(x, y, z) \mid x + y + z = 0\}$, $W_4 = \{(x, y, z) \mid x = y = z\}$ とすれば W_4 は R^3 の部分空間で $W_2 \cap W_4 = \{\mathbf{0}\}$ であり、$W_2 \oplus W_4 = \mathrm{R}^3$ となる。（確認してごらん）$\varDelta$

○ 内積・大きさ（ノルム）

ベクトル空間 R^n の標準内積というものを次のように定義する。左辺が内積を表す記号で、右辺がその計算式を表す。

$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$, $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \cdots, b_n) \in \mathrm{R}^n$ に対して、その標準内積を

$$\boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{b} = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$$

と定義する。この内積は以下の４つの性質を満たす。（確認してごらん）

(1) $\boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \bullet \boldsymbol{a}$

(2) $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \bullet \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \bullet \boldsymbol{c}$

(3) $(\alpha \boldsymbol{a}) \bullet \boldsymbol{b} = \alpha (\boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{b})$ $(\alpha \in \mathrm{R})$

(4) $\boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{a} \geqq 0$ （等号成立 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$）

この性質の（4）より、ベクトルの大きさ（またはノルムという）を次のように定義する。左辺が大きさを表す記号で、右辺がその計算式を表す。

$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{\boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{a}}$ または記号として $\|\boldsymbol{a}\|$ を用いる。ノルムという場合は後者の記号を用いることが多い。

$\boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{b} = 0$ のとき、$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ は直交するという。

Basic： 実は上の４つの性質は内積の「公理」である。内積も抽象的な概念で、標準内積以外の内積も定義することがある。その定義は上の４つの性質を満たすことが要求される。さらにスカラーが複素数であるベクトル空間では内積の値も複素数であり、さらに（1）のかわりに、$\boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{b} = \overline{\boldsymbol{b} \bullet \boldsymbol{a}}$ が性質として要求される。右辺は共役複素数である。$\varDelta$

数学は対象とする「もの」を集合としてとらえ、その集合に「構造」をいれて研究する学問である。このスタイルは「構造主義」と呼ばれ、１９世紀末から始まった近代数学をへて現代数学もそのスタイルをとっている。この場合、ベクトル空間を考察するとき内積は明確に定義しない限り内積と呼ばれる計算そのものを考えないことにしている。内積が定義された（構造として入っている）ベクトル空間を計量ベクトル空間とよび、内積が入っていないベクトル空間と明確に区別している。内積を考えなくても成り立つ性質は多くある。そのような性質だけを議論するとき、いらない内積は構造として入れない。線形独立などは本質的に内積の構造を必要としない概念である。

○ 正規直交基底

R^n に標準内積および上記大きさの構造を入れる。r 個のベクトルの組 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ がどのベクトルも零ベクトルでなくかつ異なる２つのベクトルが直交するとき、$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ を直交系という。

Claim： $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ が直交系ならば、線形独立である。（証明してごらん）

$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ が直交系でかつすべてのベクトルの大きさが１であるとき、これを正規直交系という。

V がベクトル空間（部分空間でもよい）で $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ が正規直交系かつ V を生成するとき、つまり $V=L\left[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r\right]$ のとき、$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ を V の正規直交基底という。

例１２： $\boldsymbol{e}_1=(1,0,0)$，$\boldsymbol{e}_2=(0,1,0)$，$\boldsymbol{e}_3=(0,0,1)$ とすれば、$\mathrm{R}^3=L\left[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\right]$ で明らかに $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ は正規直交系であるから、これらは R^3 の正規直交基底である。Δ

例１３： 例４から、$\boldsymbol{a}_1=(1,0,-1)$，$\boldsymbol{a}_2=(0,1,-1)$ とすれば $W_2=L\left[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\right]$ であり、この２つのベクトルは線形独立である。よって $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ は W_2 の基底であるが、W_2 の正規直交基底ではない。（一般の基底から正規直交基底をつくる手順がある。これは *Gram－Schmidt* の直交化法といわれている）Δ

○ 直交補空間

V を計量ベクトル空間、W をその部分空間とする。このとき、W の任意のベクトルに垂直な V のベクトル全体を集めた集合は V の部分空間になる。（確認してごらん）これを W の直交補空間といい、記号で $W^{\perp}$ と表す。即ち、

$$W^{\perp}=\left\{\boldsymbol{y} \in V \mid \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}=0 \text{ for every } \boldsymbol{x} \in W\right\}$$

Claim： $W \cap W^{\perp}=\{\mathbf{0}\}$ （証明してごらん）

Claim： V が有限次元、W を V の部分空間とすれば、$V=W \oplus W^{\perp}$

例１４： 例１０の W_1, W_3 で、$W_3=W_1{}^{\perp}$ である。（確認してごらん）Δ

例１５： 例１１の W_2, W_4 で、$W_4=W_2{}^{\perp}$ である。（確認してごらん）Δ

V が有限次元のとき、V の部分空間 W に対して、$\left(W^{\perp}\right)^{\perp}=W$，また、$W_1, W_2$ を同じく部分空間とすれば、

$$\left(W_1+W_2\right)^{\perp}=W_1{}^{\perp} \cap W_2{}^{\perp}, \quad \left(W_1 \cap W_2\right)^{\perp}=W_1{}^{\perp}+W_2{}^{\perp}$$

が成り立つ。（証明してごらん）

V が有限次元、W がその部分空間ならば、$V=W \oplus W^{\perp}$ となるから、V の任意のベクトル $\boldsymbol{a}$ は

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2 \quad \left(\boldsymbol{a}_1 \in W, \boldsymbol{a}_2 \in W^{\perp}\right)$$

と一意（ただ一通り）に表せる。このとき、$\boldsymbol{a}_1$ を $\boldsymbol{a}$ の W への正射影という。

例１６： 例１５において、$\mathrm{R}^3=W_2 \oplus W_4=W_2 \oplus W_2{}^{\perp}$ である。一方、例４から $\boldsymbol{a}_1=(1,0,-1)$，$\boldsymbol{a}_2=(0,1,-1)$ とすれば、これらは W_2 の基底となる。R^3 の任意のベクトル $\boldsymbol{x}=(x, y, z)$ に対して $\boldsymbol{x}=\alpha_1\boldsymbol{a}_1+\alpha_2\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{v}$ とすれば、$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{x}-\alpha_1\boldsymbol{a}_1-\alpha_2\boldsymbol{a}_2 \in W_2{}^{\perp}=W_4$ だから

$$\left(\boldsymbol{x}-\alpha_1\boldsymbol{a}_1-\alpha_2\boldsymbol{a}_2\right) \cdot \boldsymbol{a}_1=0 \Leftrightarrow \left|\boldsymbol{a}_1\right|^2\alpha_1+\left(\boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{a}_2\right)\alpha_2=\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{a}_1$$

$$\left(\boldsymbol{x}-\alpha_1\boldsymbol{a}_1-\alpha_2\boldsymbol{a}_2\right) \cdot \boldsymbol{a}_2=0 \Leftrightarrow \left(\boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{a}_2\right)\alpha_1+\left|\boldsymbol{a}_2\right|^2\alpha_2=\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{a}_2$$

$\therefore\ 2\alpha_1+\alpha_2=x-z$，$\alpha_1+2\alpha_2=y-z$ これを解けば α_1, α_2 が求まる。（最後までやってごらん）

○ 例題

例題１： R^3 の部分集合、$W_1=\{(x,y,z)\mid z=0\}$ は R^3 の部分空間であることを証明せよ。

［証明］ $\boldsymbol{a}_1=(x_1,y_1,0)\in W_1$, $\boldsymbol{a}_2=(x_2,y_2,0)\in W_1$ とすれば、任意のスカラー α_1,α_2 に対して

$$\alpha_1\boldsymbol{a}_1+\alpha_2\boldsymbol{a}_2=\alpha_1(x_1,y_1,0)+\alpha_2(x_2,y_2,0)=(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2,\ \alpha_1y_1+\alpha_2y_2,\ 0)\in W_1$$

従って、W_1 は R^3 の部分空間である。⊿

例題２： $\boldsymbol{a}_1=(1,0,-1)$, $\boldsymbol{a}_2=(0,1,-1)$ とすれば $L[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2]$ は例２の W_2 であることを示せ。

［証明］ まず W_2 が部分空間であることを示す。例題１と同じように示せばよい。

$\boldsymbol{x}_1=(x_1,y_1,z_1)\in W_2$, $\boldsymbol{x}_2=(x_2,y_2,z_2)\in W_2$ とすれば、$x_k+y_k+z_k=0\quad(k=1,2)$ であることに注意する。任意のスカラー α_1,α_2 に対して

$$\alpha_1\boldsymbol{x}_1+\alpha_2\boldsymbol{x}_2=\alpha_1(x_1,y_1,z_1)+\alpha_2(x_2,y_2,z_2)$$
$$=(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2,\ \alpha_1y_1+\alpha_2y_2,\ \alpha_1z_1+\alpha_2z_2)$$

ここで、

$$\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\alpha_1y_1+\alpha_2y_2+\alpha_1z_1+\alpha_2z_2=\alpha_1(x_1+y_1+z_1)+\alpha_2(x_2+y_2+z_2)=0$$

$\therefore\ \alpha_1\boldsymbol{x}_1+\alpha_2\boldsymbol{x}_2\in W_2$　従って、W_2 は R^3 の部分空間である。さて、本題に入る。

$W_2=L[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2]$ を示すには２つの集合 A,B で $A=B$ を証明するには、$A\subset B$ かつ $B\subset A$ を示せばよいことから、まず $L[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2]\subset W_2$ を示す。明らかに $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2\in W_2$ だから上記考察より成り立つ。つぎに $W_2\subset L[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2]$ を示す。$\boldsymbol{x}=(x,y,z)\in W_2$ とすれば $x+y+z=0$ より $z=-x-y$

$$\therefore\ \boldsymbol{x}=(x,y,-x-y)=(x,0,-x)+(0,y,-y)=x(1,0,-1)+y(0,1,-1)$$
$$=x\boldsymbol{a}_1+y\boldsymbol{a}_2\in L[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2]$$

W_2 の任意のベクトルが $L[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2]$ のベクトルであることが示されたので $W_2\subset L[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2]$ が成り立つ。従って、$W_2=L[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2]$ ⊿

例題３： 例２の W_2 は $\dim W_2=2$ であることを示せ。

［解答］ 上の例題２から $W_2=L[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2]$ が示せたので $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$ が線形独立であることを示せばよい。1次関係式 $\alpha_1\boldsymbol{a}_1+\alpha_2\boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{0}$ を解く。成分で考えれば

$$\alpha_1\boldsymbol{a}_1+\alpha_2\boldsymbol{a}_2=(\alpha_1,0,-\alpha_1)+(0,\alpha_2,-\alpha_2)=(\alpha_1,\alpha_2,-\alpha_1-\alpha_2)=(0,0,0)$$

$\therefore\ \alpha_1=\alpha_2=0$　従って、$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$ は線形独立となり、$\dim W_2=2$ が示せた。⊿

Remark： W_2 の基底は $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$ だけではない。$x+y+z=0$ から $y=-x-z$ と考えれば $\boldsymbol{b}_1=(1,-1,0)$, $\boldsymbol{b}_2=(0,-1,1)$ も基底になる。このようにベクトル空間の基底は１通りではないが有限次元ならばその基底を構成するベクトルの個数は考察しているベクトル空間に固有の値となる。ここから次元の概念が出てくる。⊿

例題４： 例１の W_1 、例２の W_2 について、$W_1+W_2=\mathrm{R}^3$ になることを証明せよ。

［証明］ $\boldsymbol{c}_1=(1,0,0)$, $\boldsymbol{c}_2=(0,1,0)$ とすれば、これは W_1 の基底である。実際 W_1 のベクトルは $\boldsymbol{x}=(x,y,0)=x(1,0,0)+y(0,1,0)\in L\left[\boldsymbol{c}_1,\boldsymbol{c}_2\right]$ $\therefore W_1\subset L\left[\boldsymbol{c}_1,\boldsymbol{c}_2\right]$ また明らかに $\boldsymbol{c}_1,\boldsymbol{c}_2\in W_1$ だから、$L\left[\boldsymbol{c}_1,\boldsymbol{c}_2\right]\subset W_1$ $\therefore W_1=L\left[\boldsymbol{c}_1,\boldsymbol{c}_2\right]$ さらに $\boldsymbol{c}_1,\boldsymbol{c}_2$ は明らかに線形独立である。従って、$W_1+W_2=L\left[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{c}_1,\boldsymbol{c}_2\right]$ （$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$ は例題３にある W_2 の基底）

視察から $\boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{c}_2-\boldsymbol{c}_1$ が成り立つので $W_1+W_2=L\left[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{c}_1,\boldsymbol{c}_2\right]$

$\because W_1+W_2=L\left[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{c}_1,\boldsymbol{c}_2\right]$ だから

$$\boldsymbol{x}\in W_1+W_2\Rightarrow \boldsymbol{x}=\alpha_1\boldsymbol{a}_1+\alpha_2\boldsymbol{a}_2+\gamma_1\boldsymbol{c}_1+\gamma_2\boldsymbol{c}_2=\alpha_1\boldsymbol{a}_1+\alpha_2\left(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{c}_2-\boldsymbol{c}_1\right)+\gamma_1\boldsymbol{c}_1+\gamma_2\boldsymbol{c}_2$$

$$=(\alpha_1+\alpha_2)\boldsymbol{a}_1+(\gamma_1-\alpha_2)\boldsymbol{c}_1+(\alpha_2+\gamma_2)\boldsymbol{c}_2\in L\left[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{c}_1,\boldsymbol{c}_2\right]$$

$$\therefore W_1+W_2=L\left[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{c}_1,\boldsymbol{c}_2\right]\subset L\left[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{c}_1,\boldsymbol{c}_2\right],$$

$W_1+W_2=L\left[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{c}_1,\boldsymbol{c}_2\right]\supset L\left[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{c}_1,\boldsymbol{c}_2\right]$ は明らか。

$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{c}_1,\boldsymbol{c}_2$ が線形独立であることは容易に確かめることができる。さて、$W_1+W_2\subset\mathrm{R}^3$ は明らかだから $W_1+W_2\supset\mathrm{R}^3$ を示す。$\boldsymbol{x}=(x,y,z)\in\mathrm{R}^3$ に対して $\alpha\boldsymbol{a}_1+\beta\boldsymbol{c}_1+\gamma\boldsymbol{c}_2=\boldsymbol{x}$ を満たす α,β,γ を求めれば、$\alpha=-z$, $\beta=x+z$, $\gamma=y$ 即ち、

$$\boldsymbol{x}=(x,y,z)=-z(1,0,-1)+(x+z)(1,0,0)+y(0,1,0)\in L\left[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{c}_1,\boldsymbol{c}_2\right]=W_1+W_2$$

$\therefore W_1+W_2\supset\mathrm{R}^3$ 　以上より、$W_1+W_2=\mathrm{R}^3$ が示せた。⊿

例題５： $W_2=\{(x,y,z)\mid x+y+z=0\}$, $W_4=\{(x,y,z)\mid x=y=z\}$ とすれば W_4 は R^3 の部分空間で $W_2\cap W_4=\{\boldsymbol{0}\}$ であり、$W_2\oplus W_4=\mathrm{R}^3$ となることを証明せよ。

［証明］ $\boldsymbol{d}=(1,1,1)$ とすれば明らかに $W_4=L\left[\boldsymbol{d}\right]$ である。よって部分空間である。

$\boldsymbol{x}=(x,y,z)\in W_2\cap W_4$ とすれば、$x+y+z=0$ かつ $x=y=z$ だから容易に $x=y=z=0$ が導ける。従って、$W_2\cap W_4=\{\boldsymbol{0}\}$ が示せた。例題４と同じで $W_2\oplus W_4=L\left[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{d}\right]$ となり、$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{d}$ は線形独立である。つぎに任意の $\boldsymbol{x}=(x,y,z)\in\mathrm{R}^3$ に対して $\boldsymbol{x}=\alpha\boldsymbol{a}_1+\beta\boldsymbol{a}_2+\gamma\boldsymbol{d}$ を満たす α,β,γ を求めれば、$\alpha=\dfrac{1}{3}(2x-y-z)$, $\beta=\dfrac{1}{3}(2y-x-z)$, $\gamma=\dfrac{1}{3}(x+y+z)$ となる。つまり $W_2\oplus W_4=L\left[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{d}\right]\supset\mathrm{R}^3$ となり、$W_2\oplus W_4=\mathrm{R}^3$ が示せた。⊿

Remark： V が有限次元で W が V の部分空間ならば、$V=W \Leftrightarrow \dim V=\dim W$ であることが知られている。証明は比較的簡単である。$V=W \Rightarrow \dim V=\dim W$ は明らか。つぎに $V\supset W$, $V\neq W$ とすれば、V のベクトルで W に入らないものがある。「これを $\boldsymbol{a}$ とすれば、W の基底にこのベクトル加えたものも線形独立である。」よって $\dim V>\dim W$ 　この事実を用いてよいなら例題４，５はもっと簡単に証明できる。⊿

上の *Remark* の「　」の部分を証明してごらん。

例題６： $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ が直交系ならば、線形独立であることを証明せよ。

［証明］ $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ が直交系だから $i \neq j \Rightarrow \boldsymbol{a}_i \bullet \boldsymbol{a}_j = 0$, $\boldsymbol{a}_i \bullet \boldsymbol{a}_i \neq 0$ である。１次関係式

$\alpha_1 \boldsymbol{a}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{a}_2 + \cdots + \alpha_r \boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{0}$ を考える。$\left(\alpha_1 \boldsymbol{a}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{a}_2 + \cdots + \alpha_r \boldsymbol{a}_r\right) \bullet \boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{0} \bullet \boldsymbol{a}_i = 0$

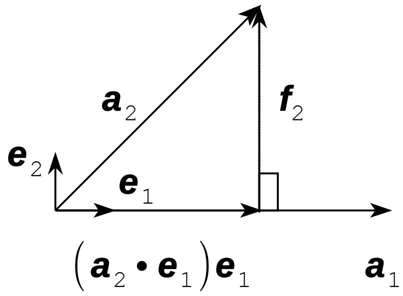
左辺は $\left(\alpha_i \boldsymbol{a}_i\right) \bullet \boldsymbol{a}_i = \alpha_i \left\|\boldsymbol{a}_i\right\|^2$ だから、$\alpha_i \left\|\boldsymbol{a}_i\right\|^2 = 0$, $\left\|\boldsymbol{a}_i\right\|^2 \neq 0$ より $\alpha_i = 0$ これが

$i = 1, 2, \cdots, r$ で成り立つから $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ は線形独立である。$\varDelta$

例題７： 例題２，３において $\boldsymbol{a}_1 = (1, 0, -1)$, $\boldsymbol{a}_2 = (0, 1, -1)$ とすれば $W_2 = L\left[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\right]$ であり

$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ は W_2 の基底であった。このとき、$\boldsymbol{e}_1 = \dfrac{1}{\left\|\boldsymbol{a}_1\right\|} \boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{f}_2 = \boldsymbol{a}_2 - \left(\boldsymbol{a}_2 \bullet \boldsymbol{e}_1\right)\boldsymbol{e}_1$,

$\boldsymbol{e}_2 = \dfrac{1}{\left\|\boldsymbol{f}_2\right\|} \boldsymbol{f}_2$ とすれば、$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ は W_2 の正規直交基底であることを証明せよ。



［証明］ $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ の成分が与えられているが一般的な証明を示す。まず線形独立であるから $\boldsymbol{a}_1 \neq \boldsymbol{0}$ 従って $\left\|\boldsymbol{a}_1\right\| \neq 0$ となり $\boldsymbol{e}_1$ は $\boldsymbol{a}_1$ と同じ向きの単位ベクトルとなる。つぎに $\boldsymbol{f}_2 \neq \boldsymbol{0}$ である。もし $\boldsymbol{f}_2 = \boldsymbol{0}$ ならば $\boldsymbol{a}_2 - \left(\boldsymbol{a}_2 \bullet \boldsymbol{e}_1\right)\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{0} \Rightarrow$

$\boldsymbol{a}_2 = \left(\boldsymbol{a}_2 \bullet \boldsymbol{e}_1\right)\boldsymbol{e}_1 = \dfrac{\boldsymbol{a}_2 \bullet \boldsymbol{e}_1}{\left\|\boldsymbol{a}_1\right\|} \boldsymbol{a}_1$ となり $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ は線形従属になる。これは仮定に反する。

$\left\|\boldsymbol{f}_2\right\| \neq 0$ となったので $\boldsymbol{e}_2$ は $\boldsymbol{f}_2$ と同じ向きの単位ベクトルである。つぎに

$$\boldsymbol{e}_1 \bullet \boldsymbol{e}_2 = \frac{1}{\left\|\boldsymbol{f}_2\right\|}\left(\boldsymbol{a}_2 - \left(\boldsymbol{a}_2 \bullet \boldsymbol{e}_1\right)\boldsymbol{e}_1\right) \bullet \boldsymbol{e}_1 = \frac{\boldsymbol{a}_2 \bullet \boldsymbol{e}_1 - \left(\boldsymbol{a}_2 \bullet \boldsymbol{e}_1\right)\left\|\boldsymbol{e}_1\right\|^2}{\left\|\boldsymbol{f}_2\right\|} = 0 \quad \left(\because \left\|\boldsymbol{e}_1\right\| = 1\right)$$

最後に $L\left[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\right] = L\left[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\right]$ を示す。

$\boldsymbol{e}_1 = \dfrac{1}{\left\|\boldsymbol{a}_1\right\|} \boldsymbol{a}_1$ だから、$\boldsymbol{e}_1 \in L\left[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\right]$、また $\boldsymbol{a}_1 = \left\|\boldsymbol{a}_1\right\| \boldsymbol{e}_1$ だから、$\boldsymbol{a}_1 \in L\left[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\right]$

$\boldsymbol{f}_2 = \boldsymbol{a}_2 - \left(\boldsymbol{a}_2 \bullet \boldsymbol{e}_1\right)\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{a}_2 - \dfrac{\boldsymbol{a}_2 \bullet \boldsymbol{e}_1}{\left\|\boldsymbol{a}_1\right\|} \boldsymbol{a}_1$ だから、$\boldsymbol{f}_2 \in L\left[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\right]$ $\therefore \boldsymbol{e}_2 \in L\left[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\right]$

$\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{f}_2 + \left(\boldsymbol{a}_2 \bullet \boldsymbol{e}_1\right)\boldsymbol{e}_1 = \left\|\boldsymbol{f}_2\right\| \boldsymbol{e}_2 + \left(\boldsymbol{a}_2 \bullet \boldsymbol{e}_1\right)\boldsymbol{e}_1$ だから、$\boldsymbol{a}_2 \in L\left[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\right]$

以上より、$L\left[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\right] = L\left[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\right]$ が示せた。この場合具体的に $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ を求めてみると

$\boldsymbol{e}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{1+0+1}}(1, 0, -1) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)$, $\boldsymbol{a}_2 \bullet \boldsymbol{e}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\boldsymbol{f}_2 = (0, 1, -1) - \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 (1, 0, -1) = \left(-\dfrac{1}{2}, 1, -\dfrac{1}{2}\right)$ $\therefore \boldsymbol{e}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(-1, 2, -1)$ $\varDelta$

Basic Points： W が部分空間のとき、$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r \in W$ ならば、$L\left[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r\right] \subset W$

ただし、$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r \in W$ はすべての $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ が W に属することを表す。

Remark： $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ から正規直交基底 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ を作る上の手順が $Gram-Schmidt$ の直交化法。

例題８： W を計量ベクトル空間の部分空間とする。このとき、$W \cap W^{\perp} = \{\mathbf{0}\}$ を証明せよ。

［証明］ $\boldsymbol{a} \in W \cap W^{\perp}$ とする。$\boldsymbol{a} \in W$ かつ $\boldsymbol{a} \in W^{\perp}$ だから、$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = 0$ 即ち $\|\boldsymbol{a}\|^2 = 0$ となり

$\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$ $\therefore W \cap W^{\perp} = \{\mathbf{0}\}$ $\varDelta$

例題９： 例１１の W_2, W_4 で、$W_4 = {W_2}^{\perp}$ であることを証明せよ。

［証明］ $\boldsymbol{x} = (x, y, z) \in {W_2}^{\perp}$ とすれば、$\boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{x} = 0$ だから、$x - z = 0,\ y - z = 0$

$\therefore x = y = z$ $\therefore {W_2}^{\perp} \subset W_4$ 一方、$\boldsymbol{d} = (1, 1, 1)$ とすれば例題５から $W_4 = L[\boldsymbol{d}]$

ここで $\boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{d} = 0,\ \boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{d} = 0$ だから、$W_4 \subset {W_2}^{\perp}$ $\varDelta$

Basic Points： $W = L[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r]$ ならば $\boldsymbol{x} \in W^{\perp} \Leftrightarrow \boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{x} = 0 \ (i = 1, 2, \cdots, r)$

例題１０： W_1, W_2 を有限次元計量ベクトル空間 V の部分空間とすれば、

$(W_1 \cap W_2)^{\perp} = {W_1}^{\perp} + {W_2}^{\perp}$ が成り立つことを証明せよ。

［証明］ $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2 \in {W_1}^{\perp} + {W_2}^{\perp}$ $(\boldsymbol{b}_i \in {W_i}^{\perp}\ ;\ i = 1, 2)$ とする。任意の $\boldsymbol{a} \in W_1 \cap W_2$ に対して $\boldsymbol{a} \in W_1,\ \boldsymbol{a} \in W_2$ だから、$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}_2 = 0 + 0 = 0$ $\therefore \boldsymbol{b} \in (W_1 \cap W_2)^{\perp}$

$\boldsymbol{a} \in W_1$ $\boldsymbol{a} \in W_2$ と考える。

${W_1}^{\perp} + {W_2}^{\perp} \subset (W_1 \cap W_2)^{\perp}$ 逆はむずかしい。本来なら証明が必要なことを用いるがそこは勘弁。なおここまでの証明は有限次元である仮定を用いていないことに注意せよ。

$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_p$ を $W_1 \cap W_2$ の正規直交基底、これに加えて $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_p, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_q$ を W_1 の正規直交基底、同じく $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_p, \boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \cdots, \boldsymbol{c}_r$ を W_2 の正規直交基底、

$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_p, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_q, \boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \cdots, \boldsymbol{c}_r, \boldsymbol{d}_1, \boldsymbol{d}_2, \cdots, \boldsymbol{d}_s$ を V の正規直交基底とする。（このように基底をつくることができることを本当なら証明する必要がある）

$\boldsymbol{x} \in (W_1 \cap W_2)^{\perp}$ とする。$\boldsymbol{x} \in V$ であるから、$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \boldsymbol{a}_i + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \boldsymbol{b}_j + \sum_{k=1}^{r} \gamma_k \boldsymbol{c}_k + \sum_{l=1}^{s} \delta_l \boldsymbol{d}_l$

と表せる。任意の $\boldsymbol{a}_i$ に対して、$\boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{x} = \alpha_i = 0$ だから、$\alpha_i = 0 \ (i = 1, 2, \cdots, p)$

$\therefore \boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^{q} \beta_j \boldsymbol{b}_j + \sum_{k=1}^{r} \gamma_k \boldsymbol{c}_k + \sum_{l=1}^{s} \delta_l \boldsymbol{d}_l = \left(\sum_{k=1}^{r} \gamma_k \boldsymbol{c}_k + \sum_{l=1}^{s} \delta_l \boldsymbol{d}_l \right) + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \boldsymbol{b}_j$ ここで、

$\boldsymbol{b}_j \cdot \left(\sum_{k=1}^{r} \gamma_k \boldsymbol{c}_k + \sum_{l=1}^{s} \delta_l \boldsymbol{d}_l \right) = 0 \ (j = 1, 2, \cdots, q),$ $\boldsymbol{c}_k \cdot \sum_{j=1}^{q} \beta_j \boldsymbol{b}_j = 0 \ (k = 1, 2, \cdots, r)$

$\therefore \sum_{k=1}^{r} \gamma_k \boldsymbol{c}_k + \sum_{l=1}^{s} \delta_l \boldsymbol{d}_l \in {W_1}^{\perp},$ $\sum_{j=1}^{q} \beta_j \boldsymbol{b}_j \in {W_2}^{\perp}$ $\therefore (W_1 \cap W_2)^{\perp} \subset {W_1}^{\perp} + {W_2}^{\perp}$

以上より、$(W_1 \cap W_2)^{\perp} = {W_1}^{\perp} + {W_2}^{\perp}$ が示せた。 $\varDelta$

証明の中で述べたが、有限次元を仮定しなくても ${W_1}^{\perp} + {W_2}^{\perp} \subset (W_1 \cap W_2)^{\perp}$ は成り立つ。

○ 問題

問題１： ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_r$ が線形独立ならば、$\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2$，$\cdots$，

$\boldsymbol{b}_k = \sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{a}_i$，$\cdots$，$\boldsymbol{b}_r = \sum_{i=1}^{r} \boldsymbol{a}_i$ とするとき、$\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \dots, \boldsymbol{b}_r$ も線形独立であることを証明せよ。

(熊本大)

問題２： $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_r$ をベクトル、W, W_1, W_2 をベクトル空間 V の部分空間とするとき、次の集合が部分空間であることを証明せよ。

（1） $L[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_r]$ （2） $W_1 \cap W_2$ （3） $W_1 + W_2$ （4） $W^{\perp}$

問題３： ３つのベクトル $\boldsymbol{a} = (4, 1, 0)$，$\boldsymbol{b} = (1, 1, 3)$，$\boldsymbol{c} = (1, -12, -13)$ がある。次の問いに答えよ。(東工大)

（1） $W = L[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ とする。このとき、$W^{\perp}$ を求めよ。(基底を求めればよい)

（2） $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ $(\boldsymbol{x} \in W,\ \boldsymbol{y} \in W^{\perp})$ である $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ を求めよ。

(答) （1） $\boldsymbol{v} = (1, -4, 1)$ とすれば、$W^{\perp} = L[\boldsymbol{v}]$

（2） $\boldsymbol{x} = (-1, -4, -15)$，$\boldsymbol{y} = (2, -8, 2)$

問題４： $\boldsymbol{x}_1 = (2, 1, 0)$，$\boldsymbol{x}_2 = (0, 1, 2)$，$\boldsymbol{x}_3 = (1, 1, 1)$，$\boldsymbol{x}_4 = (-1, 0, 1)$ について、

$L[\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2] = L[\boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4]$ であることを証明せよ。(九大)

問題５： R^3 の部分空間、$W_1 = \{(x, y, z) \mid x + 2y + z = 0\}$，$W_2 = \{(x, y, z) \mid y + z = 0\}$ について、$W_1 + W_2$，$W_1 \cap W_2$ の次元と１組の基底を求めよ。(岐阜大)

(答) $\boldsymbol{a}_1 = (1, 0, -1)$，$\boldsymbol{a}_2 = (1, -1, 1)$，$\boldsymbol{a}_3 = (1, 0, 0)$ とすれば

$W_1 + W_2 = L[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3] = \mathrm{R}^3$，$W_1 \cap W_2 = L[\boldsymbol{a}_2]$ となる。$\dim(W_1 + W_2) = 3$

$\dim(W_1 \cap W_2) = 1$ ちなみに基底はあくまで一例である。また、$W_1 = L[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2]$，

$W_2 = L[\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3]$ である。

問題６： R^3 の部分空間 $W_1 = \{(x, y, z) \mid x - y - 2z = 0\}$，$W_2 = \{(x, y, z) \mid x + y - 4z = 0\}$ について、次の問いに答えよ。なお R^3 には標準内積を入れて計量ベクトル空間とする。

（1） W_1, W_2 の１組の基底を求めよ。また次元も求めよ。

（2） $W_1 \cap W_2$ の１組の基底を求めよ。また次元も求めよ。

（3） $W_1^{\perp}, W_2^{\perp}$ の１組の基底を求めよ。また次元も求めよ。

（4） $(W_1 \cap W_2)^{\perp}$ の１組の基底を求めよ。また次元も求めよ。

(答) （1） 例えば W_1 の基底は $\boldsymbol{a}_1 = (1, 1, 0)$，$\boldsymbol{b}_1 = (2, 0, 1)$ $\therefore \dim W_1 = 2$

W_2 の基底は $\boldsymbol{a}_2 = (4, 0, 1)$，$\boldsymbol{b}_2 = (0, 4, 1)$ $\therefore \dim W_2 = 2$

（2） $4\boldsymbol{a}_1+4\boldsymbol{b}_1=3\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{b}_2$ が成り立つ。左辺は W_1 のベクトル、右辺は W_2 のベクトルだから

$4\boldsymbol{a}_1+4\boldsymbol{b}_1=3\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{b}_2\in W_1\cap W_2$ である。

$dim\left(W_1\cap W_2\right)=dim\ W_1+dim\ W_2-dim\left(W_1+W_2\right)=2+2-3=1$ よって、

$dim\left(W_1\cap W_2\right)=1$ で１組の基底は $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{b}_1=(3,1,1)$

（3） $dim\ W_1{}^{\perp}=1$, $dim\ W_2{}^{\perp}=1$ 基底はそれぞれ $\boldsymbol{c}_1=(1,-1,-2)$, $\boldsymbol{c}_2=(1,1,-4)$

（4） $\left(W_1\cap W_2\right)^{\perp}=W_1{}^{\perp}+W_2{}^{\perp}=L\left[\boldsymbol{c}_1,\boldsymbol{c}_2\right]$ で $\boldsymbol{c}_1$, $\boldsymbol{c}_2$ は線形独立。

$\therefore\ dim\left(W_1\cap W_2\right)^{\perp}=2$ で１組の基底は $\boldsymbol{c}_1$, $\boldsymbol{c}_2$

問題７： 変数 x の３次以下の整式全体（係数は実数）を $P\left(3;\mathrm{R}\right)$ と表す。通常の関数の和と定数倍により $P\left(3;\mathrm{R}\right)$ はベクトル空間になる。（これは認める）このとき、次の問いに答えよ。

（1） 関数 $1, x, x^2, x^3$ は $P\left(3;\mathrm{R}\right)$ の基底であることを証明せよ。

（2） $p(x)\in P\left(3;\mathrm{R}\right)$, $q(x)\in P\left(3;\mathrm{R}\right)$ に対して内積 $p(x)\bullet q(x)$ を

$p(x)\bullet q(x)=\int_{-1}^{1}p(x)\,q(x)\,dx$ で定義する。（これが内積の公理を満たすことも認める）

これにより関数 $p(x)$ の大きさ（ノルム）を

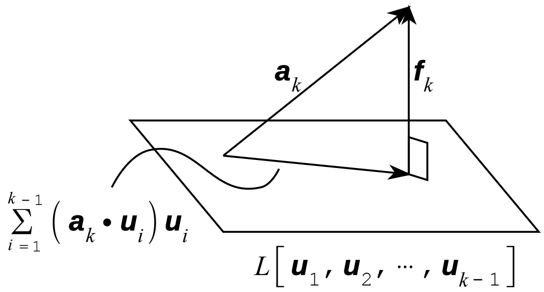
$\|p(x)\|=\sqrt{p(x)\bullet p(x)}=\sqrt{\int_{-1}^{1}\{p(x)\}^2dx}$ と定義する。このとき基底 $1, x, x^2, x^3$

から $Gram-Schmidt$ の直交化法により $P\left(3;\mathrm{R}\right)$ の正規直交基底を求めよ。

（答）（2） $\sqrt{\frac{1}{2}}$, $\sqrt{\frac{3}{2}}\,x$, $\frac{3}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}\left(x^2-\frac{1}{3}\right)$, $\frac{5}{2}\sqrt{\frac{7}{2}}\left(x^3-\frac{3}{5}x\right)$

補足： $Gram-Schmidt$ の直交化法について詳しく述べる。例題７で２つのベクトルからなる基底から正規直交基底をつくる方法（ $Gram-Schmidt$ の直交化法）を示したが、一般に r 個のベクトルからなる基底から正規直交基底をつくる方法は次の手順による。考え方は２つの場合と同じである。

$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r$： 基底とする。



$\boldsymbol{f}_1=\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{u}_1=\frac{1}{\|\boldsymbol{f}_1\|}\boldsymbol{f}_1$

$\boldsymbol{f}_2=\boldsymbol{a}_2-\left(\boldsymbol{a}_2\bullet\boldsymbol{u}_1\right)\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2=\frac{1}{\|\boldsymbol{f}_2\|}\boldsymbol{f}_2$

…

$\boldsymbol{f}_k=\boldsymbol{a}_k-\underline{\sum_{i=1}^{k-1}\left(\boldsymbol{a}_k\bullet\boldsymbol{u}_i\right)\boldsymbol{u}_i}$, $\boldsymbol{u}_k=\frac{1}{\|\boldsymbol{f}_k\|}\boldsymbol{f}_k$ $\left(k=2,3,\cdots\right)$

$\left(\sum_{i=1}^{k-1}\left(\boldsymbol{a}_k\bullet\boldsymbol{u}_i\right)\boldsymbol{u}_i\right.$ は $\boldsymbol{a}_k$ の $L\left[\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_{k-1}\right]$ への正射影$\left.\right)$

…

$\boldsymbol{f}_r=\boldsymbol{a}_r-\sum_{i=1}^{r-1}\left(\boldsymbol{a}_r\bullet\boldsymbol{u}_i\right)\boldsymbol{u}_i$, $\boldsymbol{u}_r=\frac{1}{\|\boldsymbol{f}_r\|}\boldsymbol{f}_r$

問題８： W は計量ベクトル空間の部分空間で $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ はその基底とする。このとき、上の手順で作ったベクトル $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_r$ は W の正規直交基底であることを証明せよ。

問題９： 上の問題７と同じ計量ベクトル空間 $P(3;\mathrm{R})$ の部分空間 W を $W=L[x, x^2]$ とする。このとき、次の問いに答えよ。

（1） $W^{\perp}$ の１組の基底を求めよ。

（2） $h(x)=5x^3-7x^2-x+6$ の W への正射影を求めよ。

（答）（1） $g_1(x)=5x^3-3x$, $g_2(x)=5x^2-3$ が $W^{\perp}$ の基底。

（2） $3x^2+2x$

問題１０： ベクトル空間 $P(3;\mathrm{R})$ の部分空間 $W=\{p(x) \mid p(1)=p(2)=0\}$ の次元と１組の基底を求めよ。

（答） $dim\, W=2$, $W=L[x^3-7x+6, x^2-3x+2]$

問題１１： $\boldsymbol{a}_1=(1,0,-3,-4)$, $\boldsymbol{a}_2=(0,2,1,3)$, $\boldsymbol{a}_3=(2,2,1,0)$, $\boldsymbol{a}_4=(3,4,3,5)$, $\boldsymbol{b}=(3,6,0,10)$ とする。R^4 の部分空間を $W_1=L[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2]$, $W_2=L[\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4]$ とするとき、$\mathrm{R}^4=W_1\oplus W_2$ が成り立つことを証明せよ。また、$\boldsymbol{b}$ を W_1, W_2 のベクトルの和として表せ。

（答） 前半は $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ が線形独立であることを示せばよい。後半の答えは

$\boldsymbol{b}=(2\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2)+(3\boldsymbol{a}_4-4\boldsymbol{a}_3)=(2,2,-5,-5)+(1,4,5,15)\in W_1+W_2$

問題１２： すべての項が実数である（無限）数列全体 S を考える。２つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ に対して、和を $\{a_n\}+\{b_n\}=\{a_n+b_n\}$ と定義し、スカラー倍を $\alpha\{a_n\}=\{\alpha a_n\}$ $(\alpha\in\mathrm{R})$ と定義すれば S はベクトル空間になることが知られている。（これは認める）このとき S の部分空間 $W=\{\{a_n\} \mid a_{n+2}=(\alpha+\beta)a_{n+1}-\alpha\beta a_n\}$ の次元と１組の基底を求めよ。ただし、α, β は異なる実数とする。（W が部分空間であることは容易に確認できるので、ここではそれを証明しなくてよい）

（答） $dim\, S=2$, 基底は例えば $\{\alpha^n\}$, $\{\beta^n\}$

ヒント： $a_{n+2}=(\alpha+\beta)a_{n+1}-\alpha\beta a_n$ は $a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n)$ と変形できる。

$b_n=a_{n+1}-\alpha a_n$ と表せば、$b_{n+1}=\beta b_n$, $b_1=a_2-\alpha a_1$ つまり $\{b_n\}$ は初項 $a_2-\alpha a_1$, 公比 β の等比数列である。また、$a_{n+2}-\beta a_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-\beta a_n)$ とも変形できる。

これらの問題を解いていくと次のことに気がつく。

n 次元（抽象）ベクトル空間＋基底 $\Leftrightarrow$ n 次元数ベクトル空間 R^n

基底が決まれば任意の（抽象的な）ベクトルはその基底の線形結合で一意に表せる。そのときの係数と R^n のベクトルを対応させればよいのである。

○ 行列の階数 (部分空間と次元の観点から)

行列の階数について部分空間と次元の観点から解説する。まず行列を列ベクトルを用いて表すことを考える。 $A=\left(a_{ij}\right)$ を $m\times n$ 行列とする。行列を列で区切って考える。A の第 j 列成分を列ベクトルとみて

$\boldsymbol{a}_j$ と表す。即ち、$\boldsymbol{a}_j=\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$ とすれば行列 A は、$A=\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix}$ と表せる。

例 17： $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ のとき、$\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_3=\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ とすれば

$A=\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \end{pmatrix}$ Δ 注意： 最後のところは列ベクトルの括弧を外して考える。

さて、行列の階数の定義である。

$A=\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix}$ のとき、$\left(\boldsymbol{a}_j\in \mathrm{R}^m\ ;\ j=1,2,\cdots,n\right)$ R^m の部分空間 $L\left[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n\right]$ の次元を行列 A の階数といい、記号で $rank\,A$ と表す。つまり

$rank\,A=dim\,L\left[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n\right]$

Claim： A とその転置行列 ${}^tA$ の階数は等しい。つまり、$rank\,A=rank\,{}^tA$

証明は行列式をもちいるのが普通。よって証明は省略する。別のプリントで解説する。

A が $m\times n$ 行列のとき、即ち $A=\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix}$ $\left(\boldsymbol{a}_j\in \mathrm{R}^m\ ;\ j=1,2,\cdots,n\right)$ のとき

$L\left[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n\right]$ は R^m の部分空間だから $dim\,L\left[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n\right]\leqq m$ また

$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ は n 個のベクトルからなるので $dim\,L\left[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n\right]\leqq n$ 以上より

$rank\,A=dim\,L\left[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n\right]\leqq min\{m,n\}$ まとめて、

A ： $m\times n$ 型ならば、$rank\,A\leqq min\{m,n\}$

例題 11： $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 8 \\ 3 & 7 & 2 & 15 \end{pmatrix}$ の階数を求めよ。

[解法] $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 8 \\ 3 & 7 & 2 & 15 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 7 \\ 2 & 4 & 1 & 8 \\ 0 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ ３行目－２行目、その後１と３行目を交換。

$\to\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & -2 & -1 & -6 \\ 0 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ２行目から１行目の２倍を引く、その後３行目に２行目を加え、最後に２行目に -1 を掛ける。(実はこの時点で $rank\,A=2$ という結論がでる)

$$\to\begin{pmatrix}1&3&1&7\\0&1&\frac{1}{2}&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&\boxed{-\frac{1}{2}}&-2\\0&1&\boxed{\frac{1}{2}}&3\\0&0&\boxed{0}&0\end{pmatrix}$$ ２行目を２で割った後、１行目から２行目の３倍を引く。A の列ベクトルを左から $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ とすれば、上の結果から $\boldsymbol{a}_3=\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{a}_2-\boldsymbol{a}_1\right)$, $\boldsymbol{a}_4=3\boldsymbol{a}_2-2\boldsymbol{a}_1$　つまり $\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ が $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ の線形結合で表せ、明らかに $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ は線形独立だから、$rank\,A=dim\,L\left[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4\right]=dim\,L\left[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\right]=2$　　⊿

補足： なぜ $\boldsymbol{a}_3=\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{a}_2-\boldsymbol{a}_1\right)$, $\boldsymbol{a}_4=3\boldsymbol{a}_2-2\boldsymbol{a}_1$ の関係式が出てくるのか。説明はむずかしいので手順だけ説明する。変形の最後の状態の $\boldsymbol{a}_3$ の成分を見てほしい。第１成分とやはり最後の変形の状態の $\boldsymbol{a}_1$ の第１成分を見比べる。同じようにして第２成分とやはり最後の変形の状態の $\boldsymbol{a}_2$ の第２成分を見比べる。これにより $\boldsymbol{a}_3=\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{a}_2-\boldsymbol{a}_1\right)$ という関係式を導く。$\boldsymbol{a}_4=3\boldsymbol{a}_2-2\boldsymbol{a}_1$ も同様。　⊿

例題１２： $A=\begin{pmatrix}a&b&b\\b&a&b\\b&b&a\end{pmatrix}$ の階数を求めよ。

［解法］ $A\to\begin{pmatrix}a+2b&a+2b&a+2b\\b&a&b\\b&b&a\end{pmatrix}$ ２行目および３行目を１行目に加える。

$\to\begin{pmatrix}a+2b&0&0\\b&a-b&0\\b&0&a-b\end{pmatrix}$ ２列目および３列目から１列目を引く。（注意）

$a+2b\neq0$, $a\neq b$ のとき、$\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ となるので $rank\,A=3$

$a+2b=0$, $a\neq b$ 即ち $a\neq0$, $a=-2b$ のとき、$\to\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ となるので $rank\,A=2$

$a+2b\neq0$, $a=b$ 即ち $a\neq0$, $a=b$ のとき、$\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ となるので $rank\,A=1$

$a+2b=0$, $a=b$ 即ち $a=b=0$ のとき、$\to\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ となるので $rank\,A=0$

まとめて、$rank\,A = \begin{cases} 3 & (a+2b \neq 0,\ a \neq b) \\ 2 & (a \neq 0,\ a = -2b) \\ 1 & (a \neq 0,\ a = b) \\ 0 & (a = b = 0) \end{cases}$　　　Δ

○ 行列の核

これは第 4 章線形写像の話としてするべきであるが、列ベクトルの左から行列を掛けることを線形写像と、ここでは考えて話を展開する。A を $m \times n$ 行列とし、列ベクトルを用いて $A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix}$ と表されているとする。各列ベクトルは R^m のベクトル。さて、R^n の任意のベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ に対して、R^m のベクトル $A\boldsymbol{x}$ を対応させることを考える。

即ち、　$\boldsymbol{x} \to A\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{a}_i = x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n$　　このようなベクトル全体の集合

$$\left\{ A\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{a}_i \;\middle|\; \boldsymbol{x} = {}^t\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \in \mathrm{R}^n \right\}$$

は、R^m の部分空間になる。(確認してごらん) これを行列 A の像空間といい、記号で $Im\,A$ と表す。明らかに $Im\,A = L\left[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n\right]$ だから A の階数とは A の像空間の次元のことである。

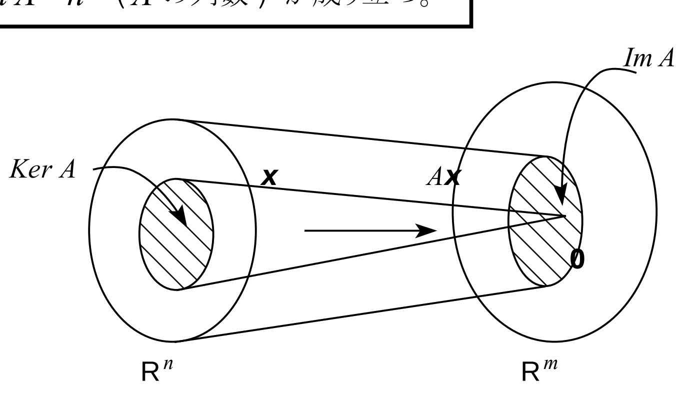
話しは変わって、$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ となる R^n のベクトル $\boldsymbol{x}$ 全体の集合を考えてみる。即ち

$$\left\{ \boldsymbol{x} \in \mathrm{R}^n \;\middle|\; A\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{0} \right\}$$

こんどはこれは R^n の部分空間になる。(確認してごらん) これを行列 A の核といい、記号で $Ker\,A$ と表す。さらに $Ker\,A$ の次元を記号で $nul\,A$ と表す。つまり、$nul\,A = dim\,(Ker\,A)$

記号の意味をまとめてみると、$rank\,A = dim\,(Im\,A)$，$nul\,A = dim\,(Ker\,A)$ となる。さて、次元定理と呼ばれる重要な定理がつぎのものである。

A が $m \times n$ 行列であるとき、$rank\,A + nul\,A = n$　(A の列数) が成り立つ。



[証明]　$nul\,A = k$ とする。然らば k 個の線形独立な R^n のベクトル $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_k$ が存在して、$Ker\,A = L\left[\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_k\right]$ となる。$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_k$ に $n-k$ 個のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_{n-k}$ を加えて

$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_{n-k}$

が R^n の基底にすることができる。(この部分は以前も書いたが認める) R^n の任意のベクトルはこれら基底の線形結合で表すことができ、$A\boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{0}$　$(i = 1, 2, \cdots, k)$ だから

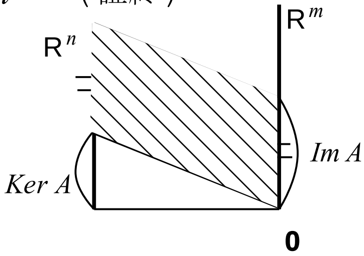
$Im\,A = L\left[A\boldsymbol{v}_1, A\boldsymbol{v}_2, \cdots, A\boldsymbol{v}_{n-k}\right]$ となる。よって、$A\boldsymbol{v}_1, A\boldsymbol{v}_2, \cdots, A\boldsymbol{v}_{n-k}$ が線形独立であることを示せばよい。1次関係式 $\sum_{i=1}^{n-k} \alpha_i A\boldsymbol{v}_i = \alpha_1 A\boldsymbol{v}_1 + \alpha_2 A\boldsymbol{v}_2 + \cdots + \alpha_{n-k} A\boldsymbol{v}_{n-k} = \mathbf{0}$ を解くと、

$\alpha_1 A\boldsymbol{v}_1 + \alpha_2 A\boldsymbol{v}_2 + \cdots + \alpha_{n-k} A\boldsymbol{v}_{n-k} = \mathbf{0} \Rightarrow A\left(\alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{v}_2 + \cdots + \alpha_{n-k} \boldsymbol{v}_{n-k}\right) = \mathbf{0}$

$\therefore\ \alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{v}_2 + \cdots + \alpha_{n-k} \boldsymbol{v}_{n-k} \in Ker\,A$ となり、$\alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{v}_2 + \cdots + \alpha_{n-k} \boldsymbol{v}_{n-k}$ は $Ker\,A$ の基底 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_k$ の線形結合で表せるが、$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_{n-k}$ は線形独立であるから $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_{n-k} = 0$　つまり $A\boldsymbol{v}_1, A\boldsymbol{v}_2, \cdots, A\boldsymbol{v}_{n-k}$ は線形独立である。

$\therefore rank\,A = dim\,(Im\,A) = n-k \quad \therefore\ rank\,A + nul\,A = (n-k) + k = n$　（証終）

右図は次元定理のイメージである。証明のヒントにもなっている。



例18： 例題11において $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 8 \\ 3 & 7 & 2 & 15 \end{pmatrix}$ で、$rank\,A = 2$ であった。$A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$,

$\boldsymbol{x} = {}^t(x \quad y \quad z \quad u)$ を解くと、消去法より $A \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\therefore x - \frac{1}{2}z - 2u = 0$,

$y + \frac{1}{2}z + 3u = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}z + 2u,\ y = -\frac{1}{2}z - 2u$

$\therefore\ \boldsymbol{x} = {}^t\left(\frac{1}{2}z + 2u \quad -\frac{1}{2}z - 2u \quad z \quad u\right) = {}^t\left(\frac{1}{2}z \quad -\frac{1}{2}z \quad z \quad 0\right) + {}^t(2u \quad -2u \quad 0 \quad u)$

$= z\,{}^t\left(\frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2} \quad 1 \quad 0\right) + u\,{}^t(2 \quad -2 \quad 0 \quad 1)$

$\therefore\ Ker\,A = L\left[\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\right],\ \boldsymbol{u}_1 = {}^t\left(\frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2} \quad 1 \quad 0\right),\ \boldsymbol{u}_2 = {}^t(2 \quad -2 \quad 0 \quad 1)$（線形独立）

よって、$nul\,A = 2 \quad \therefore\ rank\,A + nul\,A = 4$　　⊿

例題13： $1 \times n$ 行列 $A = (1 \quad 2 \quad \cdots \quad n)$ のとき、$Im\,A$ と $Ker\,A$ の1組の基底を求めよ。
［解答］ $rank\,A = 1$ だから $dim\,(Im\,A) = 1$、明らかに $Im\,A = L\,[1]$　つまり基底は 1

次元定理から $nul\,A = n - 1$、$A\boldsymbol{x} = \mathbf{0} = 0$ を解く。

$A\boldsymbol{x} = x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n = 0 \Rightarrow x_1 = -2x_2 - 3x_3 - \cdots - nx_n$

$$\therefore\ \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}-2x_2-3x_3-\cdots-nx_n\\x_2\\x_3\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=x_2\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}-3\\0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}+\cdots+x_n\begin{pmatrix}-n\\0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$$

従って$Ker\,A$ の基底は $\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3\\0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}-n\\0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$ Δ

問題１３： $A=\begin{pmatrix}1&1&3\\2&3&4\end{pmatrix}$ のとき、$Im\,A$ と$Ker\,A$ の１組の基底を求めよ。

（答） $Im\,A=L\left[\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\right]$, $Ker\,A=L\left[\begin{pmatrix}-5\\2\\1\end{pmatrix}\right]$

n 次以下の実数係数の整式全体$P(n\,;\mathrm{R})$ について次のような問題が編入試験に出題されることがあるので解説する。$P(n\,;\mathrm{R})$ の１組の基底として$1, x, x_2, \cdots, x^n$ を考える。$p(x)\in P(n\,;\mathrm{R})$ で、$p(x)=\alpha_1+\alpha_2x+\alpha_3x^2+\cdots+\alpha_{n+1}x^n$ のとき、この$p(x)$ をR^{n+1} のベクトル$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\vdots\\\alpha_{n+1}\end{pmatrix}$ と考える。むずかしく言えば同一視する（できる）。さてこのとき$p(x)$ に対してその導関数$p'(x)$ を対応させることを考えると、これは$P(n\,;\mathrm{R})$ から$P(n-1\,;\mathrm{R})$ への対応になる。$P(n-1\,;\mathrm{R})$ の１組の基底を$1, x, x_2, \cdots, x^{n-1}$ とすれば$p(x)=\alpha_1+\alpha_2x+\alpha_3x^2+\cdots+\alpha_{n+1}x^n$ のとき、$p'(x)=\alpha_2+2\alpha_3x+\cdots+n\alpha_{n+1}x^{n-1}$ となるから同様にこれをR^n のベクトル$\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}\alpha_2\\2\alpha_3\\\vdots\\n\alpha_{n+1}\end{pmatrix}$ と同一視すれば、$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\vdots\\\alpha_{n+1}\end{pmatrix}\to\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}\alpha_2\\2\alpha_3\\\vdots\\n\alpha_{n+1}\end{pmatrix}$ というR^{n+1} からR^n への対応が導関数を対応さ

せることを表している。$\boldsymbol{y}=A\boldsymbol{x}$ を満たす行列 A は $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \end{pmatrix}$ となる。

$\therefore\ rank\,A=n\,,\ nul\,A=1$

なお、$Im\,A=L\left[1,x,x^2,\cdots,x^{n-1}\right],\ Ker\,A=L\,[1]$ である。

例題14： $P(3;\mathrm{R})$ から $P(3;\mathrm{R})$ への対応、$p\,(x)\ \to\ \dfrac{p\,(x)+p\,(-x)}{2}$ について、次の問いに答えよ。ただし、$P(3;\mathrm{R})$ の基底を $1,x,x^2,x^3$ とせよ。

（1） $p\,(x)=\sum_{i=1}^{4}\alpha_i x^{i-1}$ に対して $\dfrac{p\,(x)+p\,(-x)}{2}=\sum_{i=1}^{4}\beta_i x^{i-1}$ とするとき $\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\\ \beta_4\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\\ \alpha_4\end{pmatrix}$

を満たす４次の正方行列 A を求めよ。

Hint： 基底 $1,x,x^2,x^3$ がそれぞれどのような関数に写るか。

（2） $rank\,A,\ nul\,A$ を求めよ。また $Im\,A,\ Ker\,A$ の１組の基底も求めよ。

［解答］（1） $1\to 1,\ x\to\dfrac{x-x}{2}=0,\ x^2\to\dfrac{x^2+x^2}{2}=x^2,\ x^3\to\dfrac{x^3-x^3}{2}=0$

つまり、$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$

$$\therefore\ A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

注意： 実は、$p\,(x)\ \to\ \dfrac{p\,(x)+p\,(-x)}{2}$ が $P(3;\mathrm{R})$ から $P(3;\mathrm{R})$ への線形写像（変換）であることをまず示さなければならないが、ここではそれには触れないこととした。

（2） 明らかに $rank\,A=2\ \ \therefore\ nul\,A=4-2=2,\quad Im\,A=L\left[1,x^2\right],\ Ker\,A=L\left[x,x^3\right]$ $\varDelta$

問題14： $P(3;\mathrm{R})$ から $P(3;\mathrm{R})$ への対応、$p\,(x)\ \to p\,(2x+3)$ について、次の問いに答えよ。ただし、$P(3;\mathrm{R})$ の基底を $1,x,x^2,x^3$ とせよ。

(1)　$p(x)=\sum_{i=1}^{4}\alpha_i x^{i-1}$ に対して $p(2x+3)=\sum_{i=1}^{4}\beta_i x^{i-1}$ とするとき $\begin{pmatrix}\beta_1\\\beta_2\\\beta_3\\\beta_4\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\\\alpha_4\end{pmatrix}$ を満たす4次の正方行列 A を求めよ。

(2)　$rank\,A$, $nul\,A$ を求めよ。また $Im\,A$, $Ker\,A$ の１組の基底も求めよ。

(答)(1)　$A=\begin{pmatrix}1&3&9&27\\0&2&12&54\\0&0&4&36\\0&0&0&8\end{pmatrix}$　　(2)　$rank\,A=4$, $nul\,A=0$　これから基底は明らか。