3年次数学A夏季自習課題

このプリントと高専の数学の以下の範囲を夏季課題とし，夏休み明け最初の授業でこれら課題に関する試験 (85分，80点満点) を実施する。

高専の数学2問題集 §２ 無限数列 (8～14ページ)

高専の数学3問題集 §６ 偏導関数，§７ 偏導関数の応用 (37～49ページ)

陰関数表示された関数の極値問題

$F(x,y)=0$，$F(x,y,z)=0$ など陰関数表示された関数の極値問題を考える。なお，それぞれ以下の関数が存在するかどうかの議論はしない。

$F(x,y)=0$ から定まる x の関数 $y=y(x)$

$F(x,y,z)=0$ から定める x,y の関数 $z=z(x,y)$

○ $F(x,y)=0$ の場合

$F_y\neq 0$ のとき，$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{F_x}{F_y}$ であることは学習した。(陰関数の微分法) 第2学年の数学Aで学習したことから，$F(x,y)=0$ から定まる x の関数 $y=y(x)$ が $x=a$ で極値をとるための必要条件は

$$\boxed{x=a \text{ で } \frac{dy}{dx}=0}$$

であったから，この場合にそれを適用させてみる。$F(a,b)=0$，即ち $y(a)=b$ なる点 (a,b) で $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{F_x}{F_y}=0$ が成り立つので，$F_x(a,b)=0$ となる。以上より次のことが成り立つ。（詳細な条件は省略する）

> $F(x,y)=0$ から定まる x の関数 $y=y(x)$ が，点 (a,b) で極値をとるための必要条件は
>
> $$\boxed{F(a,b)=0,\ F_x(a,b)=0}$$
>
> が成り立つことである。

つまり $F(x,y)=0$ が与えられたとき，極値を取りえる点は連立方程式

$$\begin{cases} F(x,y)=0 \\ F_x(x,y)=0 \end{cases}$$

を解いて求めればよい。

次に $F(x,y)=0$ から定まる x の関数 $y=y(x)$ において，$\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を求めてみる。

$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{F_x}{F_y}$ の両辺を x で微分すると

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{d}{dx}\left(\frac{F_x}{F_y}\right)=-\frac{\frac{d}{dx}(F_x)F_y-F_x\frac{d}{dx}(F_y)}{{F_y}^2}$$

ここで $\dfrac{d}{dx}(F_x)=F_{xx}+F_{xy}\dfrac{dy}{dx}=F_{xx}-\dfrac{F_{xy}F_x}{F_y}=\dfrac{F_{xx}F_y-F_{xy}F_x}{F_y}$，同様にして

$\dfrac{d}{dx}(F_y)=F_{xy}+F_{yy}\dfrac{dy}{dx}=F_{xy}-\dfrac{F_{yy}F_x}{F_y}=\dfrac{F_{xy}F_y-F_{yy}F_x}{F_y}$　従って

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{\dfrac{F_{xx}F_y-F_{xy}F_x}{F_y}F_y-\dfrac{F_{xy}F_y-F_{yy}F_x}{F_y}F_x}{F_y{}^2}=-\frac{F_{xx}F_y{}^2-2F_{xy}F_xF_y+F_{yy}F_x{}^2}{F_y{}^3}$$

$F(x,y)=0$ から定まる x の関数 $y=y(x)$ において

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{F_{xx}F_y{}^2-2F_{xy}F_xF_y+F_{yy}F_x{}^2}{F_y{}^3}}$$

となる。

さて第3学年数学Aで次のことを学習した。

関数 $y=f(x)$ は2回微分可能であるとする。このとき，点 $x=a$ で $f'(a)=0$ が成り立つとき

$f''(a)>0 \Rightarrow f(a)$ は極小値

$f''(a)<0 \Rightarrow f(a)$ は極大値

となる。

以上より $F(x,y)=0$ から定まる x の関数 $y=y(x)$ について，次のことが成り立つ。

$F(x,y)=0$ から定まる x の関数 $y=y(x)$ において，点 (a,b) で

$F(a,b)=F_x(a,b)=0$ が成り立つとき，この点で $\left(F_x=0\text{ だから}\right)$

$$\boxed{\begin{cases}-\dfrac{F_{xx}}{F_y}>0 \Rightarrow b=y(a)\text{ は極小値}\\[2ex] -\dfrac{F_{xx}}{F_y}<0 \Rightarrow b=y(a)\text{ は極大値}\end{cases}}$$

となる。

例題 $F(x,y)=x^3+y^3-3xy=0$ で定まる x の関数 $y=y(x)$ の極値を求めよ。

[解] $F_x=3x^2-3y$ だから $F=0$，$F_x=0$ を解く。

$\begin{cases}x^3+y^3-3xy=0 & \cdots ①\\ x^2-y=0 & \cdots ②\end{cases}$ ②から $y=x^2$，これを①に代入して $x^3\left(x^3-2\right)=0$　$\therefore x=0,\ x=\sqrt[3]{2}$

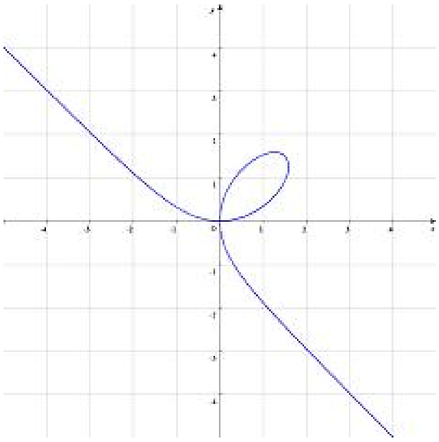
従って①，②を満たす点は A $(0,0)$，B$\left(\sqrt[3]{2},\sqrt[3]{4}\right)$ と求まる。$F_y=3y^2-3x$，$F_{xx}=6x$ だから点

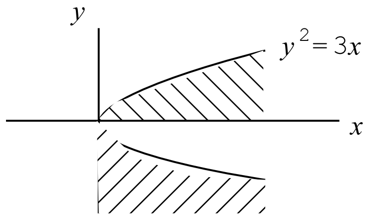
B で $-\dfrac{F_{xx}}{F_y}=\dfrac{2\cdot\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{2^4}}=-2<0$　$\therefore y=y\left(\sqrt[3]{2}\right)=\sqrt[3]{4}$ は極大値。A では $F_y=0$ となるので

この方法では判定できない。$y=y(0)=0$，また $x^3+y^3-3xy=0$ から $y\left(y^2-3x\right)=-x^3$ より $x>0$

のとき $y\left(y^2-3x\right)<0$ よって，$x>0,\ y^2<3x \Rightarrow y>0$，$x>0,\ y^2>3x \Rightarrow y>0$ となるので $x=0$

のどのような近くでも y の値は正と負の値をとるので $y(0)=0$ は極値でない。　(解終)

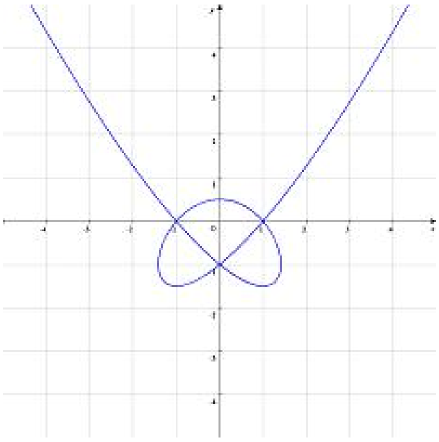


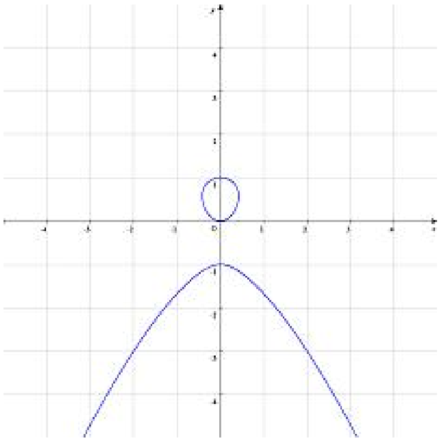


曲線 $x^3+y^3-3xy=0$

問題１： $F(x,y)=x^4-2y^3-2x^2-3y^2+1=0$ で定まる x の関数 $y=y(x)$ の極値を求めよ。

問題２： $F(x,y)=x^4+2x^2+y^3-y=0$ で定まる x の関数 $y=y(x)$ の極値を求めよ。





曲線 $x^4-2y^3-2x^2-3y^2+1=0$　　　曲線 $x^4+2x^2+y^3-y=0$

○ $F(x,y,z)=0$ の場合

$F(x,y,z)=0$ から定まる x, y の関数 $z=z(x,y)$ について，$F_z\neq 0$ ならば

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}}$$

となることを学習した。また関数 $z=f(x,y)$ が点 (a,b) で極値をとるための必要条件は

$$\boxed{f_x(a,b)=f_y(a,b)=0}$$

であることも学習した。以上のことから $F(x,y,z)=0$ から定まる x, y の関数 $z=z(x,y)$ が点 (a,b,c) で極値をとる（つまり $c=z(a,b)$ が極値となる）ための必要条件は

$$\boxed{F(a,b,c)=F_x(a,b,c)=F_y(a,b,c)=0}$$

となる。$\left(\because\ \dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F_x}{F_z}=0 \text{ から } F_x=0\text{，もう一方も同様}\right)$このときさらに極値であるか否かの判定方法も学習した。それを適用するために $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ を計算する。

- $$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{F_x}{F_z}\right)=-\frac{\frac{\partial}{\partial x}(F_x)F_z-F_x\frac{\partial}{\partial x}(F_z)}{{F_z}^2}$$ （ $F_x=F_x(x,y,z(x,y))$ に注意）

$$=-\frac{\left(F_{xx}+F_{xz}\frac{\partial z}{\partial x}\right)F_z-F_x\left(F_{xz}+F_{zz}\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{{F_z}^2}=-\frac{\left(F_{xx}-\frac{F_{xz}F_x}{F_z}\right)F_z-F_x\left(F_{xz}-\frac{F_{zz}F_x}{F_z}\right)}{{F_z}^2}$$

$$=-\frac{F_{xx}{F_z}^2-2F_{xz}F_xF_z+F_{zz}{F_x}^2}{{F_z}^3}$$

- $$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{F_{yy}{F_z}^2-2F_{yz}F_yF_z+F_{zz}{F_y}^2}{{F_z}^3}$$ (上と同様な計算を行う)

- $$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{F_x}{F_z}\right)=-\frac{\frac{\partial}{\partial y}(F_x)F_z-F_x\frac{\partial}{\partial y}(F_z)}{{F_z}^2}$$

$$=-\frac{\left(F_{xy}+F_{xz}\frac{\partial z}{\partial y}\right)F_z-F_x\left(F_{yz}+F_{zz}\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{{F_z}^2}=-\frac{\left(F_{xy}-\frac{F_{xz}F_y}{F_z}\right)F_z-F_x\left(F_{yz}-\frac{F_{zz}F_y}{F_z}\right)}{{F_z}^2}$$

$$=-\frac{F_{xy}{F_z}^2-(F_{xz}F_y-F_{yz}F_x)F_z+F_{zz}F_xF_y}{{F_z}^3}$$

以上まとめると

$F(x,y,z)=0$ から定まる x,y の関数 $z=z(x,y)$ において

$$\boxed{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{F_{xx}{F_z}^2-2F_{xz}F_xF_z+F_{zz}{F_x}^2}{{F_z}^3}}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{F_{yy}{F_z}^2-2F_{yz}F_yF_z+F_{zz}{F_y}^2}{{F_z}^3}}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=-\frac{F_{xy}{F_z}^2-(F_{xz}F_y+F_{yz}F_x)F_z+F_{zz}F_xF_y}{{F_z}^3}}$$

となる。

とくに

$F_x=F_y=0$ となる点において $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\dfrac{F_{xx}}{F_z}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\dfrac{F_{yy}}{F_z}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=-\dfrac{F_{xy}}{F_z}$

となる。従って判別式 D は $D=z_{xx}z_{yy}-{z_{xy}}^2=\dfrac{F_{xx}F_{yy}-{F_{xy}}^2}{{F_z}^2}$ となる。以上より次のことが成り立つ。

(分母は正なので D と $F_{xx}F_{yy}-F_{xy}{}^2$ の符号は一致することに注意)

$F(x,y,z)=0$ から定まる x,y の関数 $z=z(x,y)$ において，点 A(a,b,c) で
$F(a,b,c)=F_x(a,b,c)=F_y(a,b,c)=0$ が満たされているとする。このとき

- A で $F_{xx}F_{yy}-F_{xy}{}^2>0$， $-\dfrac{F_{xx}}{F_z}>0 \Rightarrow$ $c=z(a,b)$ は極小値
- A で $F_{xx}F_{yy}-F_{xy}{}^2>0$， $-\dfrac{F_{xx}}{F_z}<0 \Rightarrow$ $c=z(a,b)$ は極大値
- A で $F_{xx}F_{yy}-F_{xy}{}^2<0 \Rightarrow$ $c=z(a,b)$ は極値でない
- A で $F_{xx}F_{yy}-F_{xy}{}^2=0 \Rightarrow$ この方法では判定できない

となる

補足： $-\dfrac{F_{xx}}{F_z}>0 \Leftrightarrow -F_{xx}F_z>0 \Leftrightarrow F_{xx}F_z<0$， $-\dfrac{F_{xx}}{F_z}<0 \Leftrightarrow -F_{xx}F_z<0 \Leftrightarrow F_{xx}F_z>0$

例題 $F(x,y,z)=x^2y-xyz+2y^2-z^2+18=0$ で定まる x,y の関数 $z=z(x,y)$ の極値を求めよ。

[解] $F_x=2xy-yz$， $F_y=x^2-xz+4y$， $F_z=-xy-2z$， $F_{xx}=2y$， $F_{yy}=4$， $F_{xy}=2x-z$
$F=F_x=F_y=0$ を解く。

$$\begin{cases} x^2y-xyz+2y^2-z^2+18=0 & \cdots ① \\ 2xy-yz=0 & \cdots ②,\ ②から\ y(2x-z)=0 \quad \therefore y=0,\ z=2x \\ x^2-xz+4y=0 & \cdots ③ \end{cases}$$

$y=0$ のとき，③から $x(x-z)=0$ $\therefore x=0,\ z=x$，①から $z=\pm3\sqrt{2}$
以上から $\mathrm{A}_1(0,0,3\sqrt{2})$，$\mathrm{A}_2(0,0,-3\sqrt{2})$，$\mathrm{A}_3(3\sqrt{2},0,3\sqrt{2})$，
$\mathrm{A}_4(-3\sqrt{2},0,-3\sqrt{2})$ と求まる。

$z=2x$ のとき，③から $y=\dfrac{1}{4}x^2$，これらを①に代入すると $x^4+32x^2-144=0$ $\therefore x^2=4,-36$

$\therefore x=\pm2$，以上から $\mathrm{A}_5(2,1,4)$，$\mathrm{A}_6(-2,1,-4)$
以上が極値を取りえる点で，いずれの点でも $F_z\neq0$ である。そこで

$D=F_{xx}F_{yy}-F_{xy}{}^2=8y-(2x-z)^2$ とすれば

- A_1，A_2，A_3，A_4 において $D<0$ だから，ここでは極値を取らない。
- A_5 において $D=8>0$，$-\dfrac{F_{xx}}{F_z}=\dfrac{1}{5}>0$ より $4=z(2,1)$ は極小値
- A_6 において $D=8>0$，$-\dfrac{F_{xx}}{F_z}=-\dfrac{1}{5}<0$ より $-4=z(-2,1)$ は極大値 (解終)

問題３： $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-3yz-2zx+xy+12=0$ で定まる x,y の関数 $z=z(x,y)$ の極値を求めよ。