

微分方程式の形の補足(1階)

○ *Bernoulli* (ベルヌーイ) の微分方程式

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n \quad (n \neq 0, 1)$$

注意: $n=0$ のときは1階線形微分方程式、 $n=1$ のときは変数分離形となる。

解法: $z = y^{1-n}$ において関数 z の微分方程式を解く。 $z' = (1-n)y^{-n}y'$ よりこれを元の微分方程式に代入する。

$$\frac{1}{1-n} y^n z' + P(x)y = Q(x)y^n \quad \text{両辺を } y^n \text{ で割って、}$$

$$\frac{1}{1-n} z' + P(x)y^{1-n} = Q(x) \quad y^{1-n} = z \text{ だから、}$$

$z' + (1-n)P(x)z = (1-n)Q(x)$ これは1階線形微分方程式である。実際、

$$(1-n)P(x) = \tilde{P}(x), \quad (1-n)Q(x) = \tilde{Q}(x) \text{ とおけば、}$$

$$z' + \tilde{P}(x)z = \tilde{Q}(x) \text{ となる。}$$

○ *Clairaut* (クレロー) の微分方程式

$$y = xy' + f(y')$$

解法: 微分方程式の両辺を微分する。

$$y' = xy'' + y' + f'(y')y'' \Rightarrow y''(x + f'(y')) = 0$$

Case 1 $y'' = 0$ のとき

このとき、 $y' = C$ (任意定数) となるから、これを元の微分方程式に代入して、

$$y = Cx + f(C) \quad \text{これは任意定数を1つもつ解だから、この微分方程式の一般解}$$

Case 2 $x + f'(y') = 0$ のとき

この式と元の微分方程式を連立させて、 y' を消去する。簡単のため $y' = \alpha$ と表せば、

$$\begin{cases} y = \alpha x + f(\alpha) \cdots (1) \\ x + f'(\alpha) = 0 \cdots (2) \end{cases} \quad \text{から } \alpha \text{ を消去する。出てきた式は曲線群 (1) の包絡線になる。}$$

(微分積分II教科書 53~55 ページ)

この包絡線はこの微分方程式の特異解の曲線である。

○ *Riccati* (リッカチ) の微分方程式

$$y' + P(x)y + Q(x)y^2 = R(x)$$

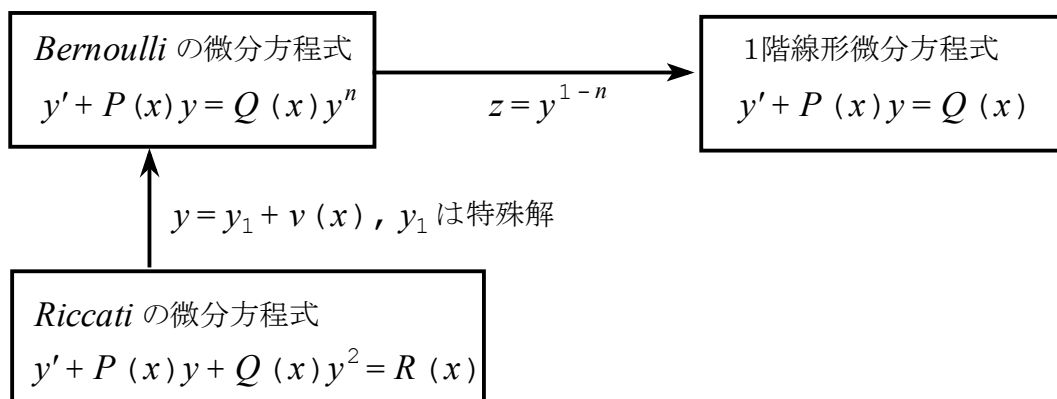
解法: 視察により特殊解を1つ見つける。それを y_1 とする。このとき、 $y = y_1 + v(x)$ とおき、元の微分方程式に代入すると、

$$\boxed{y_1' + P(x)y_1 + Q(x)y_1^2} + v' + P(x)v + 2Q(x)y_1v + Q(x)v^2 = R(x)$$

→ $R(x)$ より、

$v' + \{P(x) + 2Q(x)y_1\}v = -Q(x)v^2$ となるから、これは *Bernoulli* の微分方程式である。
 なお、視察による y_1 の見つけ方には一般論がないので、*Riccati* の微分方程式の解法はここが一番の問題になる。

関係図



問題

○ *Bernoulli*

微分積分Ⅱ問題集の54ページ例題および問題221

高専の数学3問題集の62ページ問題9.16

微分積分Ⅱ教科書の106ページ問題3 など

○ *Clairaut*

微分積分Ⅱ教科書の106ページ問題2

補充問題：以下の微分方程式の一般解および特異解を求めよ。

(1) $y = xy' + \sqrt{a^2 (y')^2 + b^2} \quad (ab \neq 0)$

(2) $y = xy' + y' - (y')^2$

○ *Riccati*

微分積分Ⅱ問題集の54ページ例題および55ページ問題222

高専の数学3問題集の62ページ問題9.17 など

完全微分方程式

1階微分方程式は、 y' を $\frac{dy}{dx}$ と表し、形式的にこれを分数式と考えて dx をはらった形で表すことがある。

例

変数分離形 $\frac{dy}{dx} = f(y)g(x) \Rightarrow dy = f(y)g(x)dx \Rightarrow dy - f(y)g(x)dx = 0$

同次形 $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right) \Rightarrow dy = f\left(\frac{y}{x}\right)dx \Rightarrow dy - f\left(\frac{y}{x}\right)dx = 0$

1 階線形微分方程式 $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \Rightarrow dy + \{P(x)y - Q(x)\}dx = 0$

一般に、微分方程式が $f(x, y) dx + g(x, y) dy = 0$ の形に表されているとき全微分方程式という。上の例からわかるように、これは微分方程式の形ではなく表現方法である。

完全微分方程式の定義

全微分方程式 $f(x, y) dx + g(x, y) dy = 0$ が次の条件を満たすとき、完全微分方程式という。

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x} \dots \textcircled{1}$$

このとき、以下に示すように次のような関数 $u(x, y)$ が存在する。

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} = f, \frac{\partial u}{\partial y} = g \right) \dots \textcircled{2}$$

そして一般解は $u(x, y) = C$ (C は任意定数) となる。

証明: まず②を満たす u が存在したら一般解は $u(x, y) = C$ であることを示す。この式は $u(x, y) - C = 0$ と表せるから、陰関数の微分法(微分積分Ⅱ教科書 48 ~ 50 ページ)より②を用いて、

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{u_x}{u_y} = -\frac{f}{g} \therefore f dx + g dy = 0 \text{ 任意定数を 1 つ持つ解だから一般解である。次に②を満}$$

たす u が存在することを示す。まず、 $\frac{\partial u}{\partial x} = f$ から、 x で積分して、

$$u = \int f(x, y) dx + \psi(y) \text{ これを } \frac{\partial u}{\partial y} = g \text{ に代入して}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \int f(x, y) dx + \psi'(y) = g \Rightarrow \psi'(y) = g - \frac{\partial}{\partial y} \int f(x, y) dx \text{ この方程式で右辺が } y \text{ の}$$

関数であることを示す。そうしないと整合性がとれない。 ①より

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(g - \frac{\partial}{\partial y} \int f(x, y) dx \right) = \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} \int f(x, y) dx \right) = \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

以上により

$$u = \int f(x, y) dx + \int \left(g(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int f(x, y) dx \right) dy$$

この積分を行う際は、積分定数をつけなくてよい。なぜなら、一般解はこの u を用いて $u(x, y) = C$ となるから、すべての任意定数を右辺の C にまとめたと考えればよいから。

なお、 u を求める上の式は暗記しないこと。この式を導いた手順を実際の解法で行えばよい。

例題: $(e^y - y^2) dx + (xe^y - 2xy + 2y) dy = 0$ は完全微分方程式であることを示し、一般解を求めよ。

[解答] $f = e^y - y^2, g = xe^y - 2xy + 2y$ と表す。

$f_y = e^y - 2y$, $g_x = e^y - 2y$ だからこの方程式は完全微分方程式である。

$$u = \int (e^y - y^2) dx + \psi(y) = xe^y - xy^2 + \psi(y) \quad \text{これを } u_y = g \text{ に代入して、}$$

$$xe^y - 2xy + \psi'(y) = xe^y - 2xy + 2y \Rightarrow \psi'(y) = 2y \Rightarrow \psi(y) = y^2$$

$$\therefore u = xe^y - xy^2 + y^2 \text{ より、一般解は、 } xe^y - xy^2 + y^2 = C \quad //$$

積分因子

微分方程式

$$f(x, y) dx + g(x, y) dy = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

が完全微分方程式でないとき、ある関数 $M(x, y)$ が存在し

$$M(x, y) f(x, y) dx + M(x, y) g(x, y) dy = 0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

が完全になるとき、 $M(x, y)$ を $\textcircled{1}$ の積分因子 (integrating factor) という。

定理 1

$M(x, y)$ が積分因子であるための必要十分条件は

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{1}{M} \left(g \frac{\partial M}{\partial x} - f \frac{\partial M}{\partial y} \right) \quad \cdots \textcircled{3}$$

が成り立つことである。

[証明] $\textcircled{2}$ が完全であることから

$$\frac{\partial}{\partial y} \{M(x, y) f(x, y)\} = \frac{\partial}{\partial x} \{M(x, y) g(x, y)\} \text{ が必要十分条件となる。計算して}$$

$$M_y f + M f_y = M_x g + M g_x \Rightarrow M(f_y - g_x) = g M_x - f M_y$$

両辺を M で割れば $\textcircled{3}$ が得られる。 (証終)

一般に $\textcircled{3}$ を解くことは困難である。次の特別な場合、 $\textcircled{3}$ は簡単に解ける。つまり積分因子 M を見出すことができる。

定理 2

$$(1) \quad \frac{f_y - g_x}{g} \text{ が } x \text{ だけの関数ならば、 } M = \exp\left(\int \frac{f_y - g_x}{g} dx\right)$$

$$(2) \quad \frac{f_y - g_x}{f} \text{ が } y \text{ だけの関数ならば、 } M = \exp\left(-\int \frac{f_y - g_x}{f} dy\right)$$

なお、(1) の M は x だけの、(2) の M は y だけの関数である。

[証明] (1) $\textcircled{3}$ において x だけの関数 M を考えれば、 $M_y = 0$ だから $\textcircled{3}$ は

$$f_y - g_x = g \frac{1}{M} \frac{dM}{dx} \text{ となる。仮定から微分方程式}$$

$$\frac{1}{M} \frac{dM}{dx} = \frac{f_y - g_x}{g} \text{ は両辺とも } x \text{ だけの関数だから矛盾がなく、変数分離形よりその特殊解(積}$$

分定数省略)を求めると

$$\int \frac{1}{M} dM = \int \frac{f_y - g_x}{g} dx \quad \therefore \log M = \int \frac{f_y - g_x}{g} dx$$

$$\therefore M = \exp\left(\int \frac{f_y - g_x}{g} dx\right)$$

(2) も同様である。(証終)

問題

1. 次の微分方程式で積分因子を見出し、これを解け。

(1) $(xy^2 - y^3)dx + (1 - xy^2)dy = 0$

(2) $(xy^3 + 1)dx + x^2y^2dy = 0$ (3) $2xy dx + (y^2 - x^2)dy = 0$

(4) $(x^2 + y^2)dx - 2xy dy = 0$ (5) $(x^2 + y^2 + x)dx + xy dy = 0$

(6) $(2xy^4 e^y + 2xy^3 + y)dx + (x^2y^4 e^y - x^2y^2 - 3x)dy = 0$

2. 次の場合、その積分因子 M は右側の式で与えられることを示せ。

(1) $\frac{f_y - g_x}{f - g} = f(x + y) \Rightarrow M = \exp\left(-\int f(u) du\right), u = x + y$

(2) $\frac{f_y - g_x}{xf - yg} = f(xy) \Rightarrow M = \exp\left(-\int f(u) du\right), u = xy$

3. 1階線形微分方程式 $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ を

$\{P(x)y - Q(x)\}dx + dy = 0$ と表すとき、 $M = \exp\left(\int P(x) dx\right)$ がその積分因子となること

を示し、完全微分方程式の解法を用いて、 $y = \frac{1}{M} \left\{ \int MQ(x) dx + C \right\}$ を導け。

4. $f(x, y)dx + g(x, y)dy = 0$ が同次形ならば、その積分因子は

$$M = \frac{1}{xf(x, y) + yg(x, y)}$$

であることを示せ。

Wronskian と2階線形微分方程式

整理して覚えて欲しいのは次のことである。

1. *Wronskian* は微分方程式とは本来無関係な定義である。

定理

同じ区間で C^1 級の2つの関数、 $f_1(x), f_2(x)$ に対して次のことが成り立つ。

$W(f_1, f_2)$ が恒等的には0でないならば、 $f_1(x), f_2(x)$ は線形独立であるが、この逆は必ずしも成り立たない。

特に、逆が一般には必ずしも成り立たないことに注意してほしい。以下がその反例である。

反例: $f_1(x) = x^3, f_2(x) = |x^3|$ のとき、 $f_1'(x) = 3x^2, f_2'(x) = \begin{cases} 3x^2 & (x > 0) \\ 0 & (x = 0) \\ -3x^2 & (x < 0) \end{cases}$ だから

$$x > 0 \text{ のとき、 } W(f_1, f_2) = \begin{vmatrix} x^3 & x^3 \\ 3x^2 & 3x^2 \end{vmatrix} = 0, \quad x < 0 \text{ のとき、 } \begin{vmatrix} x^3 & -x^3 \\ 3x^2 & -3x^2 \end{vmatrix} = 0$$

$x = 0$ のときは明らかに 0 になる。従って、 $W(f_1, f_2) \equiv 0$ ところが f_1, f_2 は次に示すように線形独立である。

$c_1 x^3 + c_2 |x^3| \equiv 0$ を満たす定数 c_1, c_2 を求めると、 $x = \pm 1$ でも成り立つから、
 $c_1 + c_2 = 0, -c_1 + c_2 = 0 \therefore c_1 = c_2 = 0$ よって、線形独立 //

2. 2 階線形微分方程式の解に *Wronskian* を用いると、事情が異なってくる。

定理

同じ区間で C^1 級の 2 つの関数、 $y_1(x), y_2(x)$ が 2 階線形微分方程式 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ の解であるならば、 y_1, y_2 が線形独立であるための必要十分条件は $W(y_1, y_2)$ が恒等的には 0 でないことである。

つまり、2 階 **斉次** 線形微分方程式の解については線形独立であることを *Wronskian* のみで判定できる。以下これを証明する。

定理

$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ の区間 I での 2 つの解を $y_1(x), y_2(x)$ とする。 I 内の 1 つの値 x_0 に対して、次の等式が成り立つ。

$$W(y_1, y_2)(x) = W(y_1, y_2)(x_0) \cdot \exp\left(-\int_{x_0}^x P(t) dt\right)$$

証明: $\frac{dW}{dx} = \frac{d}{dx}(y_1 y_2' - y_1' y_2) = y_1 y_2'' - y_1'' y_2$

$$= y_1(-P(x)y_2' - Q(x)y_2) - y_2(-P(x)y_1' - Q(x)y_1)$$

$$= -P(x)(y_1 y_2' - y_1' y_2) = -P(x)W \quad \therefore \frac{dW}{dx} = -P(x)W$$

$$\int \frac{1}{W} dW = -\int P(x) dx + C \quad \therefore W = C \cdot \exp\left(-\int P(x) dx\right) \quad \text{ここで、} \int P(x) dx \text{ の 1 つと}$$

して、 $\int_{x_0}^x P(t) dt$ をとれば、 $W = C \cdot \exp\left(-\int_{x_0}^x P(t) dt\right)$ $x = x_0$ を代入して、

$$C = W(x_0) \quad \therefore W(x) = W(x_0) \cdot \exp\left(-\int_{x_0}^x P(t) dt\right) \quad //$$

この定理から、 $\exp\left(-\int_{x_0}^x P(t) dt\right) \neq 0$ だから、 I 内のある点 x_0 で $W(x_0) \neq 0$ ならば I 内のすべての x で $W(x) \neq 0$ となり、逆にある点 x_0 で $W(x_0) = 0$ ならば、 I で $W(x) \equiv 0$ になる。即ち、

定理

y_1, y_2 が $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ の解ならば、 $W(x) \equiv 0$ であるか、すべての I 内の x に対して、 $W(x) \neq 0$ のいずれかである。

では、 y_1, y_2 が解であるとき、線形独立ならば $W(y_1, y_2)$ は恒等的には 0 ではないことを示す。

なお、線形微分方程式は、初期条件に対する解の一意性が成り立つことを用いる。

ある点 x_0 で $W(x_0) = 0$ ならば上記より $W(x) \equiv 0$ になる。このとき、初期条件

$$\begin{cases} c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) = 0 \\ c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) = 0 \end{cases} \text{を満たす少なくとも一方は 0 でない定数 } c_1, c_2 \text{ が } W(x_0) = 0 \text{ より}$$

存在する。 $y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ とすれば、 y は解で、初期条件に対する解の一意性より $y \equiv 0$

これは y_1, y_2 が線形独立であることに矛盾する。従って、 $W(x_0) = 0$ となる点 x_0 は存在せずすべての I 内の x に対して、 $W(x) \neq 0$ である。 //

以上を総合して次の定理を得る。

定理

$y_1(x), y_2(x)$ を $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ の線形独立な解とすると、任意の解は $y_1(x), y_2(x)$ の適当な線形結合で与えられる。

この定理が教科書 111 ページに書かれていることである。

証明: 任意の解を $y(x)$ とする。 $W(y_1, y_2)(x_0) \neq 0$ だから、

$$\begin{cases} c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) = y(x_0) \\ c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) = y'(x_0) \end{cases} \text{を満たす定数 } c_1, c_2 \text{ が一意的に決まる。解の一意性より}$$

$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ である。 //

線形微分方程式の補足

ここでは 2 階微分方程式

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x)$$

について補足事項を説明する。なお、 $P = P(x), Q = Q(x), R = R(x)$ はある区間 I で連続とする。

○ 斉次線形微分方程式

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

これを一般に解くことは容易ではない。ただ、1 つの 0 でない解を見つけるとあとは容易に解ける。この解を発見する場合、次のことを知っているといよい。

P, Q の条件	1 つの解
$P + xQ = 0$	x
$m(m-1) + mxP + x^2Q = 0$	x^m
$1 + P + Q = 0$	e^x
$1 - P + Q = 0$	e^{-x}
$m^2 + mP + Q = 0$	e^{mx}

例: $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$ は、 $y'' - \frac{3}{x}y' + \frac{4}{x^2}y = 0$ だから、上の表の 2 番目に相当する可能性がある

ある。よって 1 つの解を $y = x^m$ と予想してもとの方程式に代入、

$$m(m-1)x^m - 3mx^m + 4x^m = 0 \Rightarrow m^2 - 4m + 4 = 0 \quad \therefore m = 2 \quad \Delta$$

1 つの 0 でない解、 y_1 が見つかりると以下の定理によりもうひとつの線形独立な解を見つけることができる。

定理 1 (斉次線形微分方程式の一般解)

$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ の 0 でない 1 つの解を y_1 とすると、次の式で求められる y_2 は線形独立なもう 1 つの解である。

$$y_2 = y_1 \int \frac{1}{y_1^2} \exp\left(-\int P(x) dx\right) dx \quad \text{但し、} \exp x = e^x$$

従って、一般解は

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 y_1 + C_2 y_1 \int \frac{1}{y_1^2} \exp\left(-\int P(x) dx\right) dx$$

である。

[証明] 定数変化法を用いる。 $u = u(x)$ として、 $y_2 = uy_1$ を微分方程式に代入。

$$y_2' = u'y_1 + uy_1', \quad y_2'' = u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1'' \quad \text{より}$$

$$u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1'' + P(x)(u'y_1 + uy_1') + Q(x)uy_1 = 0$$

u を微分している項としていない項でまとめると、

$$u''y_1 + (2y_1' + P(x)y_1)u' + \underbrace{(y_1'' + P(x)y_1' + Q(x)y_1)}_0 u = 0$$

↓
 y_1 は微分方程式の解だからこれは 0 になる

$$u''y_1 + (2y_1' + P(x)y_1)u' = 0 \Rightarrow v = u' \text{ とおけば、}$$

$$y_1 v' + (2y_1' + P(x)y_1)v = 0 \Rightarrow \text{これは変数分離形}$$

$$\therefore \frac{v'}{v} = -\left(2\frac{y_1'}{y_1} + P(x)\right) \Rightarrow \log v = -2 \int \frac{y_1'}{y_1} dx - \int P(x) dx$$

$$\log v = -2 \log y_1 - \int P(x) dx \Rightarrow v = \frac{1}{y_1^2} \exp\left(-\int P(x) dx\right)$$

$$v = u' \text{ だから、} u = \int \frac{1}{y_1^2} \exp\left(-\int P(x) dx\right) dx$$

$\therefore y_2 = uy_1 = y_1 \int \frac{1}{y_1^2} \exp\left(-\int P(x) dx\right) dx$ 次に、 y_1, y_2 が線形独立であることを示す。

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} y_1 & y_1 \int \frac{1}{y_1^2} \exp\left(-\int P(x) dx\right) dx \\ y_1' & \frac{1}{y_1} \exp\left(-\int P(x) dx\right) + y_1' \int \frac{1}{y_1^2} \exp\left(-\int P(x) dx\right) dx \end{vmatrix}$$

$$= \exp\left(-\int P(x) dx\right) \neq 0 \quad \therefore y_1, y_2 \text{ は線形独立。} \quad (Q.E.D.)$$

例: $x^2 y'' - 3xy' + 4y = 0$ 即ち、 $y'' - \frac{3}{x}y' + \frac{4}{x^2}y = 0$ の1つの解は $y_1 = x^2$ だから、 $P = -\frac{3}{x}$ より

$$-\int P dx = \int \frac{3}{x} dx = 3 \log x = \log x^3 \Rightarrow \exp\left(-\int P dx\right) = x^3$$

$\therefore y_2 = x^2 \int \frac{1}{x^4} x^3 dx = x^2 \log x$ 従つて、一般解は

$$y = C_1 x^2 + C_2 x^2 \log x = x^2 (C_1 + C_2 \log x) \quad \Delta$$

○ 非斉次線形微分方程式

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x)$$

上で斉次の場合の解法を述べたが、もし斉次の線形独立な2つの解が求まると、以下のように非斉次の場合の1つの解が求まる。

定理 2 (非斉次線形微分方程式の1つの解)

y_1, y_2 が斉次線形微分方程式 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ の線形独立な解とすれば、非斉次線形微分方程式 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x)$ の1つの解、 $\eta(x)$ は

$$\eta(x) = y_2 \int \frac{y_1 R(x)}{W(y_1, y_2)} dx - y_1 \int \frac{y_2 R(x)}{W(y_1, y_2)} dx$$

[証明] 定数変化法を用いる。 u_1, u_2 を x の関数として、 $\eta(x) = u_1 y_1 + u_2 y_2$ を微分方程式に代入。 $\eta'(x) = \boxed{u_1' y_1 + u_2' y_2} + u_1 y_1' + u_2 y_2'$ であるが、 $\boxed{}$ の部分が0になるものを考える。(1つ求めればよいのでこのような条件をつけてもよい) つまり、

$$u_1' y_1 + u_2' y_2 = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

このとき、 $\eta''(x) = u_1 y_1'' + u_2 y_2'' + u_1' y_1' + u_2' y_2'$ より

$$u_1 y_1'' + u_2 y_2'' + u_1' y_1' + u_2' y_2' + P(x)(u_1 y_1' + u_2 y_2') + Q(x)(u_1 y_1 + u_2 y_2) = R(x)$$

$$u_1 L(y_1) + u_2 L(y_2) + u_1' y_1' + u_2' y_2' = R(x) \quad \text{但し、} L(y) = y'' + P(x)y' + Q(x)y$$

y_1, y_2 は $L(y) = 0$ の解だから、 $L(y_1) = L(y_2) = 0$ 故に

$$u_1' y_1' + u_2' y_2' = R(x) \quad \dots \textcircled{2}$$

①、②から $\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ R(x) \end{pmatrix}$ となり、 $W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0$ だからクラーム

ルの公式から

$$u_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ R(x) & y_2' \end{vmatrix}}{W(y_1, y_2)} = -\frac{y_2 R(x)}{W(y_1, y_2)}, \quad u_2' = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & R(x) \end{vmatrix}}{W(y_1, y_2)} = \frac{y_1 R(x)}{W(y_1, y_2)}$$

$$\therefore u_1 = -\int \frac{y_2 R(x)}{W(y_1, y_2)} dx, \quad u_2 = \int \frac{y_1 R(x)}{W(y_1, y_2)} dx \quad \text{これらを } \eta(x) = u_1 y_1 + u_2 y_2 \text{ に代}$$

入して定理の結論を得る。

(Q.E.D.)

例題: $x^2 y'' - xy' + y = x^2$ の一般解を求めよ。

[解法] $x^2 y'' - xy' + y = 0$ の 1 つの解を $y_1 = x^m$ と予想して斉次方程式に代入。

$$m(m-1)x^m - mx^m + x^m = 0 \text{ より, } (m-1)^2 = 0 \quad \therefore m=1 \quad \therefore y_1 = x$$

この方程式は $y'' - \frac{1}{x}y' + \frac{1}{x^2}y = 0$ だから、 $P = -\frac{1}{x}$ に相当。 $-\int P dx = \log x$ より定理 1 から

もう 1 つの解 $y_2 = y_1 \int \frac{1}{y_1^2} \exp\left(-\int P(x) dx\right) dx = x \int \frac{1}{x^2} x dx = x \log x$ となり、これらは線形

独立。従って定理 2 から $y'' - \frac{1}{x}y' + \frac{1}{x^2}y = 1$ であることに注意して ($R=1$)

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} x & x \log x \\ 1 & \log x + 1 \end{vmatrix} = x \text{ だから}$$

$$\begin{aligned} \eta(x) &= y_2 \int \frac{y_1 R(x)}{W(y_1, y_2)} dx - y_1 \int \frac{y_2 R(x)}{W(y_1, y_2)} dx \\ &= (x \log x) \int \frac{x}{x} dx - x \int \frac{x \log x}{x} dx = x^2 \log x - x(x \log x - x) = x^2 \end{aligned}$$

以上より一般解は

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \eta(x) = C_1 x + C_2 x \log x + x^2$$

△

○ 標準形と独立変数の変換

$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x)$ の解法について、以下の手法がある。

$y = v(x) \exp\left(-\frac{1}{2} \int P(x) dx\right)$ として元の微分方程式に代入。

$$y' = v' \exp\left(-\frac{1}{2} \int P dx\right) - \frac{1}{2} v P \exp\left(-\frac{1}{2} \int P dx\right),$$

$$\begin{aligned} y'' &= v'' \exp\left(-\frac{1}{2} \int P dx\right) - v' P \exp\left(-\frac{1}{2} \int P dx\right) + \frac{1}{4} v P^2 \exp\left(-\frac{1}{2} \int P dx\right) \\ &\quad - \frac{1}{2} v P' \exp\left(-\frac{1}{2} \int P dx\right) \end{aligned}$$

$$\therefore y'' + P y' + Q y$$

$$= \left(v'' - v' P + \frac{1}{4} v P^2 - \frac{1}{2} v P' + v' P - \frac{1}{2} v P^2 + v Q \right) \exp\left(-\frac{1}{2} \int P dx\right)$$

$$= \left\{ v'' + \left(Q - \frac{1}{2} P' - \frac{1}{4} P^2 \right) v \right\} \exp\left(-\frac{1}{2} \int P dx\right)$$

$$\therefore v'' + \left(Q - \frac{1}{2} P' - \frac{1}{4} P^2 \right) v = R \exp\left(\frac{1}{2} \int P dx \right)$$

最後は $v'' + Iv = J$ の形で、2階線形微分方程式の標準形と呼ばれているものである。

例題： $y'' - 4xy' + 4x^2y = xe^{x^2}$ を解け。

[解法] $P = -4x$ とすれば、 $\exp\left(-\frac{1}{2} \int P dx\right) = \exp\left(\int 2x dx\right) = e^{x^2}$

$y = ve^{x^2}$ として問題の微分方程式に代入すれば

$$y' = v'e^{x^2} + 2xve^{x^2}, \quad y'' = v''e^{x^2} + 4xv'e^{x^2} + v(2 + 4x^2)e^{x^2} \text{ であるから}$$

$$y'' - 4xy' + 4x^2y = v''e^{x^2} + 4xv'e^{x^2} + v(2 + 4x^2)e^{x^2} - 4x(v'e^{x^2} + 2xve^{x^2}) + 4x^2ve^{x^2}$$

$$= (v'' + 2v)e^{x^2} \quad \therefore v'' + 2v = x \quad \text{視察で } v = \frac{x}{2} \text{ は1つの解だから}$$

$$v = C_1 \cos \sqrt{2}x + C_2 \sin \sqrt{2}x + \frac{x}{2} \quad \therefore y = e^{x^2} \left(C_1 \cos \sqrt{2}x + C_2 \sin \sqrt{2}x + \frac{x}{2} \right) \quad (\text{解終})$$

ヘヴィサイドの演算子法

非斉次定数係数線形微分方程式の1つの解を求める方法で、ヘヴィサイド (*Heaviside*) の演算子法がある。これを解説する。

○ 微分演算子、積分演算子

$$D = \frac{d}{dx} \text{ とし } Dy = \frac{dy}{dx}, \quad D^2y = \frac{d^2y}{dx^2}, \quad D^n = \frac{d^ny}{dx^n} \text{ と定義する。また整式}$$

$$f(\xi) = \sum_{k=0}^n a_k \xi^{n-k} = a_0 \xi^n + a_1 \xi^{n-1} + \dots + a_{n-1} \xi + a_n$$

に対して

$$f(D) = \sum_{k=0}^n a_k D^{n-k}, \quad f(D)y = a_0 \frac{d^ny}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y$$

とする。ただし、 a_k ($k=0, 2, \dots, n$) は定数とする。おもに $n=2$ の場合について議論するが、一般の場合も同様に考えられる。

$f(D) = D^2 + aD + b$ を文字 D の式とみて因数分解して $(D - \alpha)(D - \beta)$ となったならば

$$f(D)y = y'' + ay' + b = (D - \alpha)(D - \beta)y = (D - \beta)(D - \alpha)y$$

が明らかに成り立つ。

例： $y'' + 3y' + 2y = (D^2 + 3D + 2)y = (D + 1)(D + 2)y = (D + 2)(D + 1)y$

$$\therefore (D + 1)(D + 2)y = (D + 1)(y' + 2y) = D(y' + 2y) + (y' + 2y)$$

$$= y'' + 2y' + y' + 2y = y'' + 3y' + 2y$$

同様にして $(D + 2)(D + 1)y = y'' + 3y' + 2y$

さて、関数 $F = F(x)$ に対して $Dy = F$ を満たす y は F の原始関数だから、 $y = \int F dx$

これと $Dy = F$ の関係から、 $y = \frac{1}{D} F$ と考える。つまり、 $\frac{1}{D} F = \int F dx$ さらに

$$y = \frac{1}{f(D)} F \Leftrightarrow f(D)y = F$$

と定める。 $f(D) = (D - \alpha)(D - \beta)$ のとき、 $(D - \alpha)(D - \beta)y = (D - \beta)(D - \alpha)y$ であるから

$$\frac{1}{(D - \alpha)(D - \beta)} F = \frac{1}{D - \alpha} \left(\frac{1}{D - \beta} F \right) = \frac{1}{D - \beta} \left(\frac{1}{D - \alpha} F \right)$$

が成り立つ。

○ 公式

公式 1 ただし、 $y = y(x)$ 、 α は定数。(複素数でもよい)

$$(1) f(D)e^{\alpha x} = f(\alpha)e^{\alpha x}$$

$$(2) f(D)(e^{\alpha x}y) = e^{\alpha x}f(D + \alpha)y$$

$$(3) f(D)y = e^{\alpha x}f(D + \alpha)(e^{-\alpha x}y)$$

[証明] (1) 明らかに $D^k(e^{\alpha x}) = \alpha^k e^{\alpha x}$ ($k: 0$ 以上の整数) であるから $f(D) = \sum_{k=0}^n a_k D^{n-k}$

のとき、 $f(D)e^{\alpha x} = \sum_{k=0}^n a_k D^{n-k} e^{\alpha x} = \sum_{k=0}^n a_k \alpha^{n-k} e^{\alpha x} = f(\alpha)e^{\alpha x}$

$$(2) D^k(e^{\alpha x}y) = \sum_{l=0}^k {}_k C_l (D^{k-l}e^{\alpha x})(D^l y) = \sum_{l=0}^k {}_k C_l \alpha^{k-l} e^{\alpha x} D^l y$$

$$= e^{\alpha x} \sum_{l=0}^k {}_k C_l \alpha^{k-l} D^l y = e^{\alpha x} (D + \alpha)^k y$$

従って $f(D) = \sum_{k=0}^n a_k D^{n-k}$ のとき、 $f(D)(e^{\alpha x}y) = \sum_{k=0}^n a_k D^{n-k} (e^{\alpha x}y)$

$$= e^{\alpha x} \sum_{k=0}^n a_k (D + \alpha)^{n-k} y = e^{\alpha x} f(D + \alpha)y$$

(3) $y = e^{\alpha x}(e^{-\alpha x}y)$ であるから (2) より明らか。 (証終)

公式 2 y, α は公式 1 と同じとする。

$$(4) f(\alpha) \neq 0 \text{ ならば } \frac{1}{f(D)} e^{\alpha x} = \frac{e^{\alpha x}}{f(\alpha)}$$

$$(5) \frac{1}{f(D)} (e^{\alpha x}y) = e^{\alpha x} \frac{1}{f(D + \alpha)} y$$

$$(6) \frac{1}{f(D)} y = e^{\alpha x} \frac{1}{f(D + \alpha)} (e^{-\alpha x}y)$$

[証明] (4) (1) より $f(D) \left(\frac{e^{\alpha x}}{f(\alpha)} \right) = \frac{1}{f(\alpha)} f(D) e^{\alpha x} = \frac{f(\alpha) e^{\alpha x}}{f(\alpha)} = e^{\alpha x}$

$$\therefore \frac{1}{f(D)} e^{\alpha x} = \frac{e^{\alpha x}}{f(\alpha)}$$

(5) $z = \frac{1}{f(D + \alpha)} y$ とおけば (2) を用いて

$$f(D) \left(e^{\alpha x} \frac{1}{f(D + \alpha)} y \right) = f(D) (e^{\alpha x} z) = e^{\alpha x} f(D + \alpha) z = e^{\alpha x} f(D + \alpha) \frac{1}{f(D + \alpha)} y$$

$$= e^{\alpha x} y \quad \therefore \frac{1}{f(D)} (e^{\alpha x} y) = e^{\alpha x} \frac{1}{f(D + \alpha)} y$$

(6) (3)と同様に考えればよい。(証終)

○ 例題 以下、 $y=y(x)$, $y'=\frac{dy}{dx}$, $y''=\frac{d^2y}{dx^2}$ とする。

例題 1 次の 2 階線形微分方程式の 1 つの解を演算子を用いて求めよ。

$$(1) y'' - 4y' + 4y = e^{-x} \quad (2) y'' - y = e^x$$

[解法] (1) $y'' - 4y' + 4y = (D - 2)^2 y$ だから、1 つの解は

$$\frac{1}{(D - 2)^2} e^{-x} \stackrel{(*)}{=} \frac{1}{(-1 - 2)^2} e^{-x} = \frac{e^{-x}}{9} \quad (\because (*) \text{ 公式 (4)})$$

(2) $y'' - y = (D + 1)(D - 1)y$ だから、1 つの解は

$$\frac{1}{(D + 1)(D - 1)} e^x = \frac{1}{D - 1} \left(\frac{1}{D + 1} e^x \right) \stackrel{(*)}{=} \frac{1}{D - 1} \left(\frac{e^x}{1 + 1} \right) = \frac{1}{2} \frac{1}{D - 1} e^x$$

$$\stackrel{(**)}{=} \frac{1}{2} e^x \frac{1}{(D + 1) - 1} 1 = \frac{1}{2} e^x \frac{1}{D} 1 = \frac{e^x}{2} \int 1 dx = \frac{x}{2} e^x \quad (\because (**) \text{ 公式 (5)}) \quad (\text{終})$$

例題 2 次の 2 階線形微分方程式の 1 つの解を演算子を用いて求めよ。

$$(1) y'' - 3y' + y = x^2 \quad (2) y'' + 2y' = 2x - 3$$

解法の前に 山辺の方法 と呼ばれるものを説明する。右辺が x の整式である場合に 1 つの解を次のように求めることができる。 $f(D) = D^2 + aD + b$ (a, b は定数で、 $b \neq 0$) のとき説明する。

$y'' + ay' + by = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$ の 1 つの解は

$$\frac{1}{D^2 + aD + b} (a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n)$$

$$\frac{a_0 x^n}{b} + \frac{a_1 b - naa_0}{b^2} x^{n-1} + \dots$$

$$b + aD + D^2 \sqrt{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n}$$

$$\frac{a_0 x^n + \frac{naa_0}{b} x^{n-1} + \frac{n(n-1)a_0}{b} x^{n-2}}{\left(b + aD + D^2 \right) \frac{a_0 x^n}{b}}$$

$$\left(\frac{a_1 b - naa_0}{b} \right) x^{n-1} + \left(\frac{a_2 b - n(n-1)a_0}{b} \right) x^{n-2} \quad (\text{上の式から下の式を引く})$$

$$\left(\frac{a_1 b - naa_0}{b} \right) x^{n-1} + \dots \quad \left(b + aD + D^2 \right) \frac{a_1 b - naa_0}{b^2} x^{n-1}$$

と計算していく。ポイントは $f(D)$ を D の昇べきの順に並べることである。

[解法] (1) 1 つの解は $\frac{1}{D^2 - 3D + 1} x^2$ だから、下にあるように計算すると $x^2 + 6x + 16$ となる。

$$\begin{array}{r}
x^2+6x+16 \\
1-3D+D^2 \sqrt{x^2} \\
\hline
x^2-6x+2 \quad \longleftarrow (1-3D+D^2)x^2=x^2-6x+2 \\
\hline
6x-2 \\
6x-18 \quad \longleftarrow (1-3D+D^2)6x=6x-18 \\
\hline
16 \\
16 \quad \longleftarrow (1-3D+D^2)16=16 \\
\hline
0
\end{array}$$

(2) 1つの解は $\frac{1}{D^2+2D}(2x-3) = \frac{1}{D+2} \left(\frac{1}{D}(2x-3) \right)$ ($f(D)$ に定数項がない場合)

$$= \frac{1}{D+2} \left(\int (2x-3) dx \right) = \frac{1}{D+2}(x^2-3x) = \frac{1}{2}x^2-2x+1$$

注意： $\frac{1}{2}x^2-2x+1$ の定数項 1 はなくてもよい。つまり $\frac{1}{2}x^2-2x$ でも正解。なぜこのようなことになるのか。それは $\int (2x-3) dx = x^2-3x+C$ (C は任意定数) であるが、 C を省略したことに起因する。ここで $C=-2$ とすれば下記の計算は (*3) の時点で終了する。

$$\begin{array}{r}
\frac{1}{2}x^2-2x+1 \\
2+D \sqrt{x^2-3x} \\
\hline
x^2+x \\
\hline
-4x \\
-4x-2 \quad (*3) \\
\hline
2 \\
2 \\
\hline
0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
\frac{1}{2}x^2-2x \\
2+D \sqrt{x^2-3x-2} \\
\hline
x^2+x \\
\hline
-4x-2 \\
-4x-2 \quad (*3) \\
\hline
0
\end{array}$$

(終)

例題 3 $y''-2y'-3y=6\sin 3x$ を満たす1つの解を演算子を用いて求めよ。

右辺が $\sin \alpha x, \cos \alpha x$ の場合は Euler の公式を用いて $f(D)y=e^{i\alpha x}$ を解けばよい。なぜなら $f(D)y_1=\cos \alpha x, f(D)y_2=\sin \alpha x$ とし、 $y=y_1+i y_2$ とすれば

$f(D)y=f(D)y_1+f(D)(i y_2)=\cos \alpha x+i \sin \alpha x=e^{i\alpha x}$ 従って $f(D)y=e^{i\alpha x}$ の解の実部が $f(D)y=\cos \alpha x$ の解で、虚部が $f(D)y=\sin \alpha x$ の解である。

[解法] $(D^2-2D-3)y=6e^{i3x}$ を解く。 $f(D)=D^2-2D-3$ とすれば $f(i3)=-12-i6 \neq 0$

だから、 $\frac{1}{D^2-2D-3}(6e^{i3x}) = -\frac{6e^{i3x}}{12+i6} = -\frac{2-i}{5}(\cos 3x+i \sin 3x)$ となる。この虚部が解だ

から、1つの解は $\frac{1}{5} \cos 3x - \frac{2}{5} \sin 3x$ となる。 (終)

例題4 $y'' - 6y' + 9y = x^2 e^{3x}$ の一般解を求めよ。

[解法] まず斉次方程式 $y'' - 6y' + 9y = 0$ を解く。特性方程式が $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$ だから $\lambda = 3$

(二重解) 従って $y'' - 6y' + 9y = 0$ の解は、 $y_1 = (C_1 + C_2 x) e^{3x} \dots$ ① となる。次に問題の方程式の1つの解 η を演算子を用いて求める。

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{1}{(D-3)^2} (x^2 e^{3x}) \stackrel{\text{公式(5)}}{=} e^{3x} \frac{1}{\{(D+3)-3\}^2} x^2 = e^{3x} \frac{1}{D^2} x^2 = e^{3x} \int \left(\int x^2 dx \right) dx \\ &= e^{3x} \int \frac{1}{3} x^3 dx = \frac{1}{12} x^4 e^{3x} \dots \text{②} \end{aligned}$$

①、②から一般解は $y = y_1 + \eta = (C_1 + C_2 x) e^{3x} + \frac{1}{12} x^4 e^{3x}$ (終)

例題5 $y'' - 2y' - y = x e^x \sin x$ を満たす1つの解を演算子を用いて求めよ。

[解法] $f(D) = D^2 - 2D - 1$, $f(D)y = x e^x e^{ix} = x e^{(1+i)x}$ を解く。

$f(D+1+i) = (D+1+i)^2 - 2(D+1+i) - 1 = D^2 + i2D - 3$ より

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{f(D)} (x e^{(1+i)x}) \stackrel{\text{公式(5)}}{=} e^{(1+i)x} \frac{1}{f(D+1+i)} x = e^{(1+i)x} \frac{1}{D^2 + i2D - 3} x \\ &= e^{(1+i)x} \left(-\frac{1}{3} x - i \frac{2}{9} \right) = e^x (\cos x + i \sin x) \left(-\frac{1}{3} x - i \frac{2}{9} \right) \end{aligned}$$

この虚部をとれば、 $Im(y) = -e^x \left(\frac{2}{9} \cos x + \frac{1}{3} x \sin x \right)$ (終)

この演算子を用いた解法は、定数係数 n 階線形微分方程式にも適用できる。

○ 問題

次の微分方程式の1つの解を求めよ。

(1) $y^{(3)} - 3y'' - y' + 3y = x^3$ (2) $y^{(4)} - 2y^{(3)} + 2y'' - 2y' + y = \cos 2x$

(3) $y^{(3)} - 5y'' + 9y' - 5y = x \cos x$ (4) $y^{(3)} - y'' - 2y' = e^{2x} \sin x$

(5) $y^{(3)} + 5y'' + 2y' - 8y = (x^2 - 2x - 8)e^{-3x}$ (6) $y^{(3)} - y'' + y' - y = 4 \sin x$

(7) $y^{(3)} - 2y'' - 5y' + 6y = e^{3x}$ (8) $y^{(3)} + 3y'' - y' - 3y = 3x^2 + 20x$

最後に定数係数でない2階線形微分方程式で、よく出題されるものを紹介する。

a, b を定数とするとき $x^2 y'' + axy' + by = R(x)$ を *Euler* の微分方程式という。

解法 $\Rightarrow u = \log x$ ($x = e^u$) と変数変換して解く。このとき $x^2 y'' + axy' + by = R(x)$ は

$$\frac{d^2 y}{du^2} + (a-1) \frac{dy}{du} + by = R(e^u)$$

となる。これは定数係数2階線形微分方程式である。

高専の数学3問題集 69-70 ページの問題 10.9, 10.11 (1), (2) などがこれに当たる。