ベクトル空間の公理

○ ベクトル空間

ここではベクトル空間（線形空間ともいう）の「公理」を述べる。教科書に書かれていることは正確には「幾何ベクトル空間」である。ベクトル空間はもっと抽象的なものである。なおここではベクトルを表す記号として $\vec{a}$ ではなく、$\boldsymbol{a}$ という太文字を用いる。$\vec{a}$ では有効線分で表される幾何ベクトルを想像させるからである。

> ベクトル空間の公理（７つの公理：響きがよい！）
>
> 空でない集合 V の要素（元）に対して「加法」が定義され以下の性質を持つ。
>
> １． $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$ （和に関する交換法則）
>
> ２． $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$ （和に関する結合法則）
>
> ３． 与えられた任意の $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in V$ に対して、$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ を満たす $\boldsymbol{x}\in V$ がただ１つ存在する。（$\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ には依存する）
>
> さらに体 K の要素に対し、スカラー乗と言われる演算が存在して、即ち、$K\times V\to V$ なる演算で以下の性質を持つ。（$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$：ベクトル、$m, n$：スカラー）
>
> ４． $(mn)\boldsymbol{a}=m(n\boldsymbol{a})$ （スカラーに関する結合法則）
>
> ５． $(m+n)\boldsymbol{a}=m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{a}$ （ベクトルに関する分配法則）
>
> ６． $m(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=m\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{b}$ （スカラーに関する分配法則）
>
> ７． $1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$

以上の７条件を満たすとき、集合 V を体 K 上の**ベクトル空間**といい、このときの V の要素を**ベクトル**という。大切なのは以上の条件を満たす集合であれば「ベクトル空間の構造をもつ」といい、すべてベクトルと考えることである。なお「体」とは実数全体 R または複素数全体 C の集合と考えてよい。読みは「たい」であり「からだ」ではない。(^^)

cf： 代数学で扱う基本的な対象に、群・環・体がある。読みは、ぐん・かん・たい。群は積しか定義されていないもの。環は和と積が定義されているが、積については「半群」といわれるもので群より条件が弱い。体は和と積が定義され、積については群の構造をもっている。君たちがよく知っている実数全体や複素数全体は、体の構造をもつ具体的な例である。

この７つの公理を用いて順次以下のことを証明していく。大切なのは公理のみ仮定して証明することである。

（1） 零ベクトルの存在と一意性

以下の２つを証明する。

(i) 任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ に対して

$$\boldsymbol{v}+\boldsymbol{x}=\boldsymbol{v} \quad \cdots \text{①}$$

を満たすベクトル $\boldsymbol{x}$ が存在する。

(ii) 上の①を満たすベクトルはただ1つしか存在しない。

［証明］ あるベクトルを１個とりだし、それを $\boldsymbol{a}$ とする。公理３から

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a} \quad \cdots ②$$

を満たすベクトル $\boldsymbol{x}$ がただ１つ存在する。（大切なのはこの時点では $\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{a}$ に依存している）さて任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ に対して同じく公理３から

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{v} \quad \cdots ③$$

を満たすベクトル $\boldsymbol{y}$ が（ただ１つ）存在する。このとき、

$$\boldsymbol{v}+\boldsymbol{x}\underset{③}{=}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{x}\underset{公理１}{=}(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{a})+\boldsymbol{x}\underset{公理２}{=}\boldsymbol{y}+(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{x})\underset{②}{=}\boldsymbol{y}+\boldsymbol{a}\underset{公理１}{=}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{y}\underset{③}{=}\boldsymbol{v}$$

$\therefore\ \boldsymbol{v}+\boldsymbol{x}=\boldsymbol{v}$ が任意の $\boldsymbol{v}$ に対して成り立つ。

次に任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ に対してもう１つ $\boldsymbol{z}$ があって

$$\boldsymbol{v}+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{v} \quad \cdots ④$$

が成り立つとする。このとき、

$$\boldsymbol{z}=\boldsymbol{z}+\boldsymbol{x}\underset{公理１}{=}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x} \quad \therefore\ \boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}$$

（最初の等号は①で $\boldsymbol{v}$ を $\boldsymbol{z}$ と考えて適用、３番目の等号は④で $\boldsymbol{v}$ を $\boldsymbol{x}$ と考えて適用した）

つまり④のような $\boldsymbol{z}$ は実は $\boldsymbol{x}$ に等しいことが示された。以上で (i) , (ii) が示された。　（証終）

以上の考察から零ベクトルの概念が出てくる。

> V をベクトル空間とするとき、以下の条件を満たす V の要素（ベクトル） $\boldsymbol{x}$ がただ１つだけ存在する。
>
> $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}$ （$\boldsymbol{a}$ は V の任意のベクトル）
>
> そこでこの $\boldsymbol{x}$ を $\mathbf{0}$ と表し、零ベクトルという。
>
> $\boldsymbol{a}+\mathbf{0}=\mathbf{0}+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a} \quad \textit{for any } \boldsymbol{a}\in V$

（2） いくつかの事実

以下、あたりまえと思われることを証明する。これらは証明が必要な事柄である。

(iii)　$0\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$,　$m\mathbf{0}=\mathbf{0}$　ただし、$\boldsymbol{a}$ は任意のベクトル、m は任意のスカラーである。なお、0 はスカラー、すなわち数の零、$\mathbf{0}$ は零ベクトルである。

まず、$0\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$ を証明する。これは任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ に対して、$\boldsymbol{v}+0\boldsymbol{a}=\boldsymbol{v}$ を示せばよい。公理３から、

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{x}=\boldsymbol{v} \quad \cdots ⑤$$

を満たすベクトル $\boldsymbol{x}$ が存在する。このとき、

$$\boldsymbol{v}+0\boldsymbol{a}\underset{⑤}{=}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{x})+0\boldsymbol{a}\underset{公理１}{=}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a})+0\boldsymbol{a}\underset{公理２}{=}\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{a}+0\boldsymbol{a})\underset{公理７}{=}\boldsymbol{x}+(1\boldsymbol{a}+0\boldsymbol{a})$$

$$=\boldsymbol{x}+(1+0)\boldsymbol{a}=\boldsymbol{x}+1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{x}=\boldsymbol{v}$$　（順に公理５、数の和、公理７、公理１、⑤）

$\therefore\ 0\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$

次に任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ に対して、$\boldsymbol{v}+m\mathbf{0}=\boldsymbol{v}$ を示す。$m=0$ ならばはじめに示したことから明らか。

$m\neq 0$ のとき、

$$\boldsymbol{v}+m\mathbf{0}=1\boldsymbol{v}+m\mathbf{0}=m\left(\frac{1}{m}\boldsymbol{v}+\mathbf{0}\right)=m\left(\frac{1}{m}\boldsymbol{v}\right)=\left(m\frac{1}{m}\right)\boldsymbol{v}=1\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}$$

公理 7　　公理 6　　　零ベクトル　　公理 4　　数の計算　公理 7

$\therefore m\mathbf{0}=\mathbf{0}$　　（証終）

与えられたベクトル $\boldsymbol{a}$ に対して、公理 3 から、$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ を満たすベクトル $\boldsymbol{x}$ がただ 1 つ存在する。

これを $\boldsymbol{a}$ の逆ベクトルといい、記号で $-\boldsymbol{a}$ と表す。

(iv)　$(-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$

なぜ、これを証明する必要があるのか。左辺はスカラー乗で計算されるもので、右辺は和に関する公理からでてきたものだから、まったく別物なのである。 であるが、これを証明すれば上の (iii) とあわせてベクトルの計算をあたかも文字式のようにしてよいことがわかる。

[証明]　$\boldsymbol{a}+(-1)\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$ を示す。

$$\boldsymbol{a}+(-1)\boldsymbol{a}=1\boldsymbol{a}+(-1)\boldsymbol{a}=\left(1+(-1)\right)\boldsymbol{a}=0\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$$

（証終）

○ ベクトル空間の例

最後にベクトル空間の例をいくつかあげる。いずれも 7 つの公理を満たす。各自確認してごらん。

(1)　閉区間 $[a,b]$ 上で定義された連続関数 $f(x)$, $g(x)$ およびスカラー（数）m に対して $f+g$ を $f(x)+g(x)$, mf を $mf(x)$ と定めれば、これらの連続関数の全体はベクトル空間になる。これを記号で $C(a,b)$ と表す。以前から授業で話しているように関数もベクトルとして捉えて議論することがある。とくに量子力学を本格的に学習するときは複素数の値をとる関数を考え複素ベクトル空間として関数の内積を定義し（*Hilbert* 空間という）議論する。

Key word : 複素計量ベクトル空間、*Banach*（バナッハ）空間、*Hilbert*（ヒルベルト）空間

(2)　n 次元実数ベクトル空間。後期で学習する行列の用語を用いる。n 行 1 列の行列を列ベクトルというが、つまり、

$$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}$$ およびスカラー m に対して、

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}a_1+b_1\\a_2+b_2\\\vdots\\a_n+b_n\end{pmatrix},\quad m\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}ma_1\\ma_2\\\vdots\\ma_n\end{pmatrix}$$

と定義すれば、これらの和とスカラー乗は 7 つの公理を満たす。このベクトル空間を記号で R^n と

表し、n 次元実数ベクトル空間という。a_i, b_i, m などを複素数の範囲まで拡げたものを記号で $\mathbf{C}^n$ と表し、n 次元複素数ベクトル空間という。ベクトル空間ではこの後で学習する線形結合と線形独立・線形従属という概念がとても大切で、そこから基底と次元いう概念がでてくる。さらにこれらから任意の「有限次元」ベクトル空間はこの数ベクトル空間と「線形同型」（ベクトル空間としては同じもの）であることが分かっている。