微分積分Ⅱ・積分法の補足(その他の積分)

◎ 指数，対数関数の積分

Rule： $Q\,(X)$ は X の有理関数とする。

$\int Q\left(e^{ax}\right)dx$ $(a\neq 0)$ $\Rightarrow$ $t=e^{ax}$ と置換する。

$\int Q\left(\log x\right)\dfrac{1}{x}\,dx \Rightarrow t=\log x$ と置換する。

前者は $dt=ae^{ax}dx=at\,dx$ $\therefore\ dx=\dfrac{1}{at}\,dt$ となるから $\int Q\left(e^{ax}\right)dx=\int\dfrac{Q\,(t)}{at}\,dt$

後者は $dt=\dfrac{1}{x}\,dx$ となるから $\int Q\left(\log x\right)\dfrac{1}{x}\,dx=\int Q\,(t)\,dt$ となり，いずれも t の有理関数の積分に帰着される。

例題１：次の不定積分を求めよ。

（1） $\displaystyle\int\frac{e^{2x}}{\sqrt[4]{e^x+1}}\,dx$ （2） $\displaystyle\int (x+1)\,e^x\log x\,dx$

[解] （1） $t=\sqrt[4]{e^x+1}$ と置換する。$e^x=t^4-1$ より $e^x dx=4t^3dt$

$$\therefore\int\frac{e^{2x}}{\sqrt[4]{e^x+1}}\,dx=\int\frac{e^x}{\sqrt[4]{e^x+1}}\,e^xdx=\int\frac{t^4-1}{t}\cdot 4t^3dt=4\int\left(t^6-t^2\right)dt$$

$$=4\left(\frac{1}{7}\,t^7-\frac{1}{3}\,t^3\right)=\frac{4}{21}\,t^3\left(3t^4-7\right)=\frac{4}{21}\left(e^x+1\right)^{3/4}\left(3e^x-4\right)$$

（2） $\int (x+1)\,e^x dx=(x+1)\,e^x-\int e^x dx=xe^x$ だから，部分積分法より

$$\int (x+1)\,e^x\log x\,dx=\int\left(xe^x\right)'\log x\,dx=xe^x\log x-\int xe^x\,\frac{1}{x}\,dx=xe^x\log x-e^x$$

$=e^x(x\log x-1)$ (解終)

問題１：次の不定積分を求めよ。

（1） $\displaystyle\int e^x\left(\log x+\frac{1}{x}\right)dx$ （2） $\displaystyle\int\frac{dx}{\left(e^x+e^{-x}\right)^4}$

◎ 二項積分

r，s が有理数で，n が自然数，m が整数のとき（つまり r，$s\in\mathbb{Q}$，$n\in\mathbb{N}$，$m\in\mathbb{Z}$）

$\int x^r\left(ax^s+b\right)^{m/n}dx$ を<u>二項積分</u>という。

Rule：

$$\int x^r\left(ax^s+b\right)^{m/n}dx \text{ は } \begin{cases} \dfrac{r+1}{s}\in \mathrm{Z} \Rightarrow t=\left(ax^s+b\right)^{1/n} \\ \dfrac{r+1}{s}+\dfrac{m}{n}\in \mathrm{Z} \Rightarrow t=\left(a+bx^{-s}\right)^{1/n} \end{cases} \text{ と置換する。}$$

注意： 二項積分は上のRuleの場合以外，不定積分を初等関数（今まで習った関数およびその合成関数と考えてよい）で表すことができないことが知られている。

例題２： $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{\left(\sqrt[3]{x^2}+1\right)^2}}dx$ を求めよ。

[解] これは $\displaystyle\int x^{1/3}\left(x^{2/3}+1\right)^{-2/3}dx$ と同じなので $r=\dfrac{1}{3}$, $s=\dfrac{2}{3}$ に相当し $\dfrac{r+1}{s}=2$ だから

$t=\left(x^{2/3}+1\right)^{1/3}$ と置換する。

$dt=\dfrac{1}{3}\left(x^{2/3}+1\right)^{-2/3}\cdot\dfrac{2}{3}x^{-1/3}dx=\dfrac{2}{9}\underline{\left(x^{2/3}+1\right)^{-2/3}\cdot x^{-1/3}}$, $x^{2/3}=\underline{t^3-1}$ だから

$$\int x^{1/3}\left(x^{2/3}+1\right)^{-2/3}dx=\int x^{2/3}\underline{\left(x^{2/3}+1\right)^{-2/3}\cdot x^{-1/3}}dx=\int\frac{9}{2}\left(t^3-1\right)dt$$

$$=\frac{9}{2}\left(\frac{1}{4}t^4-t\right)=\frac{9}{8}t\left(\underline{t^3-4}\right)=\frac{9}{8}\left(x^{2/3}+1\right)^{1/3}\left(x^{2/3}-3\right)$$ (解終)

問題２： 次の不定積分を求めよ。

（1） $\displaystyle\int x^5\sqrt{\left(x^3+8\right)^3}\,dx$　　（2） $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x}\cdot\sqrt[4]{\left(x^2+1\right)^5}}$

◎ 逆数置換法

これは例題をもってその方法を示す。

例題３： $I=\displaystyle\int\frac{dx}{(x+3)^2\sqrt{5x^2+28x+40}}$ を求めよ。

[解] 無理関数の積分の定石に従えば $\sqrt{5x^2+28x+40}=t-\sqrt{5}x$ （無理関数の積分５ページ）と置換するのであるが，ここでは $x+3=\dfrac{1}{t}$ と置換する。$dx=-\dfrac{1}{t^2}dt$ であり

$$\sqrt{5x^2+28x+40}=\sqrt{5(x+3)^2-2(x+3)+1}=\sqrt{\frac{5}{t^2}-\frac{2}{t}+1}=\frac{\sqrt{t^2-2t+5}}{|t|} \cdots ①$$

$$\therefore I=\int t^2\cdot\frac{|t|}{\sqrt{t^2-2t+5}}\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt=-\int\frac{|t|}{\sqrt{(t-1)^2+4}}dt \cdots ②$$

Case1： $x+3>0$

$$I=-\int\frac{t}{\sqrt{(t-1)^2+4}}dt=-\int\frac{(t-1)+1}{\sqrt{(t-1)^2+4}}dt=-\sqrt{(t-1)^2+4}-\int\frac{dt}{\sqrt{(t-1)^2+4}}$$

$$=-\sqrt{(t-1)^2+4}-\log\left(t-1+\sqrt{(t-1)^2+4}\right)$$

①から $\sqrt{(t-1)^2+4}=t\cdot\sqrt{5x^2+28x+40}=\dfrac{\sqrt{5x^2+28x+40}}{x+3}$, $t-1=\dfrac{1}{x+3}-1=\dfrac{-x-2}{x+3}$

$$\therefore\ I=-\frac{\sqrt{5x^2+28x+40}}{x+3}-\log\frac{\sqrt{5x^2+28x+40}-x-2}{x+3}$$

Case2： $x+3<0$

このとき $|t|=-t$ だから②より $I=\dfrac{\sqrt{5x^2+28x+40}}{x+3}+\log\dfrac{\sqrt{5x^2+28x+40}+x+2}{-(x+3)}$

まとめると $I=-\dfrac{\sqrt{5x^2+28x+40}}{|x+3|}-\dfrac{x+3}{|x+3|}\log\left(\dfrac{\sqrt{5x^2+28x+40}}{|x+3|}-\dfrac{x+2}{x+3}\right)$ (解終)

注意： $\sqrt{(t-1)^2+4}>\sqrt{(t-1)^2}=|t-1|\geqq t-1$ $\therefore\ \sqrt{(t-1)^2+4}>t-1$ だから真数に絶対値記号は不要である。

問題３： $\displaystyle\int\frac{x^4-1}{x^2\sqrt{x^4-x^2+1}}dx$ $\left(t=x+\dfrac{1}{x}\text{ または }t=x^2+\dfrac{1}{x^2}\text{ と置換せよ}\right)$