2014年度学年末試験問題・応用数学（S4）

１． 単一閉曲線 C： $x=4\cos t$， $y=\sin t$ $(0 \leqq t \leqq 2\pi)$ とするとき、積分 $\displaystyle\int_C \frac{\sin z}{(z-\pi)^2}\,dz$ の値を求める次の文章の（　　）に入る最も適切な答えを解答用紙にかけ。ただし、答のみ。

曲線の式から t を消去して x，y の関係式を導くと（ １ ）＝１ となる。従って点 $z=\pi$ は C の内部にある。$f(z)=\sin z$ と表せば、$f(z)$ は全複素数平面で（ ２ ）である。（ ３ ）の積分表示から

$\displaystyle\int_C \frac{\sin z}{(z-\pi)^2}\,dz=$（ ４ ）$f'$（（ ５ ））＝（ ６ ）となる。

２． 次の積分の値を求めよ。なお、曲線が単一閉曲線の場合は正の向きの積分。

（1） $\displaystyle\int_C \frac{z^3+1}{z^2+1}\,dz$， C： 点 -1，1，$2i$ を頂点とする三角形の周

（2） $\displaystyle\int_C \frac{e^{2z}}{z^2+1}\,dz$，$C$： $|z+i|=1$

３． 次の積分の値を求めよ。

（1） $\displaystyle\int_C ze^{-z}dz$，$C$：$z=\pi(1-t)+2\pi i t$ $(0 \leqq t \leqq 1)$

（2） $\displaystyle\int_C z^2 dz$，$C$： 図１の曲線 （ただし、答のみ）

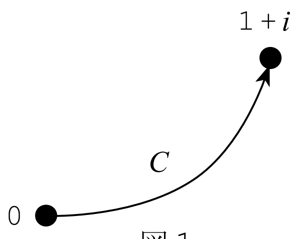


図１

４． 次の問いに答えよ。ただし、答のみ。

（1） $f(z)=\dfrac{1}{2-z}$ の $z=-1$ を中心とする $Taylor$ 展開を求めよ。

（2） （1）の $Taylor$ 級数の収束半径 R を求めよ。

（3） $\dfrac{1}{(2-z)^2}$ の $z=-1$ を中心とする $Taylor$ 展開を求めよ。ただし、$|z+1|<R$ とする。

５． $R>0$ とする。複素数平面上の３つの線分を

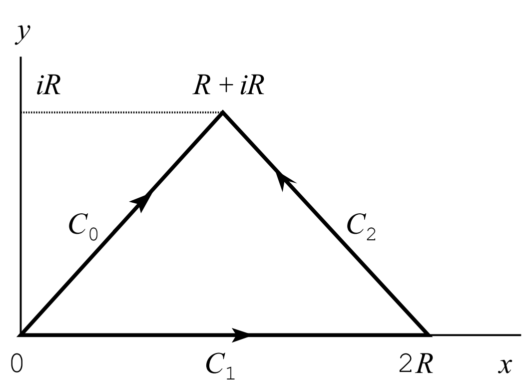
C_0：$z=t+it$ $(0 \leqq t \leqq R)$

C_1：$z=t$ $(0 \leqq t \leqq 2R)$

C_2：$z=(2R-t)+it$ $(0 \leqq t \leqq R)$

とし、関数 $f(z)=exp(-z^2)$ を考える。

このとき、次の空欄に入るもっとも適切なものを解答欄にかけ。ただし、答のみ。



注意：$exp\,z=e^z$ のこと。また、（　）は数値、［　］は t や R の値が実数の式が入る。問題番号を囲む括弧は数式上必要な括弧の役目はしない。たとえば（ １ ）＋ i（ ２ ）の答が $4-i3$ のとき、$4+i(-3)$ として（ ２ ）に入るのは (-3) となる。単に -3 ではだめ。

（注意はここまで）

$C = C_1 + C_2 - C_0$ とすれば $\displaystyle\int_C f(z)\,dz = (\ 1\ )$ … ①

C_2 上で $f(z(t)) = exp\{[\ 2\ ] + i[\ 3\ ]\}$ だから、$|f(z(t))| = exp[\ 4\ ]$

$\therefore\ 0 \leqq \left|\displaystyle\int_{C_2} f(z)\,dz\right| \leqq \int_0^R |f(z(t))|\,(\ 5\ )\,dt = \dfrac{1 - exp[\ 7\ ]}{[\ 6\ ]}$

$\therefore \displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_{C_2} f(z)\,dz = (\ 8\ )$ … ②

また、$\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_{C_1} f(z)\,dz = (\ 9\ )$ … ③

C_0 上では $f(z(t)) = exp([\ 10\ ]i)$ だから、$\displaystyle\int_{C_0} f(z)\,dz = \int_0^R (\ 11\ )\,exp([\ 10\ ]i)\,dt$

以上、①、②、③から、$\displaystyle\int_0^\infty exp([\ 10\ ]i)\,dt = (\ 12\ ) + i(\ 13\ )$

この等式の両辺の実部と虚部を比較して

$\displaystyle\int_0^\infty cos(2t^2)\,dt = \int_0^\infty sin(2t^2)\,dt = (\ 14\ )$

6．関数 $f(z) = \dfrac{1}{(z+3)\ (z+2)}$ について、次の問いに答えよ。

(1) 点 -3 を中心とする $0<|z+3|<1$ における $f(z)$ の *Laurent* 展開を求めよ。

(2) 点 -2 を中心とする $0<|z+2|<1$ における $f(z)$ の *Laurent* 展開を求めよ。

(3) 点 -3 を中心とする $1<|z+3|$ における $f(z)$ の *Laurent* 展開を求めよ。

(4) 点 -2 を中心とする $1<|z+2|$ における $f(z)$ の *Laurent* 展開を求めよ。

(5) $C_1 : |z+3| = \dfrac{1}{2}$ とするとき、$\displaystyle\int_{C_1} f(z)\,dz$ を求めよ。ただし、答のみ。

(6) $C_2 : |z+2| = \dfrac{1}{2}$ とするとき、$\displaystyle\int_{C_2} f(z)\,dz$ を求めよ。ただし、答のみ。

(7) $\Gamma_R : |z| = R$（ただし、$R>0,\ R\neq 2,\ R\neq 3$）とするとき、$\displaystyle\int_{\Gamma_R} f(z)\,dz$ を求めよ。

7．次の関数の孤立特異点における留数の値を求めよ。(全ての孤立特異点について求めよ)
ただし、(2)，(3) は答のみ。

(1) $f(z) = z\,cos\dfrac{1}{z}$　　(2) $f(z) = \dfrac{1 - cos\,z}{z^3}$　　(3) $f(z) = \dfrac{sin\,z}{z}$

8．$f(z) = Log(1+z)$ について、次の問いに答えよ。

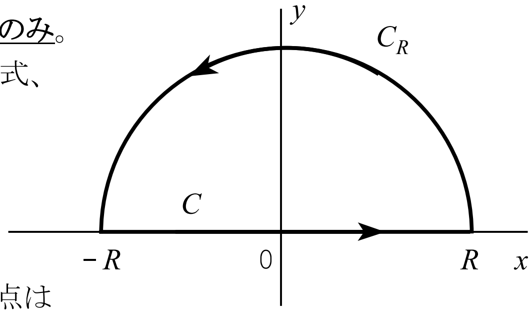
(1) $z=0$ を中心とする $|z|<1$ における $f(z)$ の *Taylor* 展開を求めよ。

(2) $C : |z| = \dfrac{1}{2}$ のとき、$\displaystyle\int_C \dfrac{f(z)}{z^2}\,dz$ を求めよ。ただし、答のみ。

9． $f(z)=\dfrac{z\,e^{iz}}{\left(z^2+4\right)^2}$, $C_R : z=Re^{it}$ $\left(0 \leqq t \leqq \pi\right)$, $C : z=x$ $\left(-R \leqq x \leqq R\right)$ について、次の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙にかけ。ただし、答のみ。

注意： （　）には数値または定数、［　］には x の式、

＜　＞には t の式が入る。なお、R は定数と考えよ。



(ここから)

$R>3$ のとき、C_R+C の内部にある $f(z)$ の孤立特異点は（ 1 ）であり、留数を求めると $Res\,[\,f,$（ 1 ）$]=$（ 2 ）となる。$\therefore \displaystyle\int_{C_R+C} f(z)\,dz=$（ 3 ） … ①

この等式の左辺は、$\displaystyle\int_{C_R} f(z)\,dz+\int_C f(z)\,dz$

$\displaystyle =\int_{C_R} f(z)\,dz+\int_{-R}^{R}$［ 4 ］$dx+i\displaystyle\int_{-R}^{R}$［ 5 ］$dx=\displaystyle\int_{C_R} f(z)\,dz+i\int_{-R}^{R}$［ 5 ］$dx$ … ②

（$\because$ ［ 4 ］は奇関数）

一方 C_R 上で $Re\left(e^{iz}\right)=$＜ 6 ＞だから、$\left|z\,e^{iz}\right|=$＜ 7 ＞$\leqq R$ （$\because$ $0 \leqq t \leqq \pi$ なので $\sin t \geqq 0$）

従って C_R 上で $\left|\dfrac{z\,e^{iz}}{\left(z^2+4\right)^2}\right| \leqq \dfrac{R}{(\ 8\ )}$ （$\because$ $\left|z^2+4\right| \geqq \left|z^2\right|-4$）

$\displaystyle\therefore \lim_{R\to\infty}\left|\int_{C_R} f(z)\,dz\right| \leqq \lim_{R\to\infty}\frac{(\ 9\ )}{(\ 8\ )}=0 \quad \therefore \lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)\,dz=0$ … ③

①、②、③より、$\displaystyle\lim_{R\to\infty}\left(i\int_{-R}^{R}\right.$［ 5 ］$\left.dx\right)=\displaystyle\lim_{R\to\infty}\left(\int_{C_R} f(z)\,dz+\int_C f(z)\,dz\right)=$（ 10 ）

$\therefore \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}$［ 5 ］$dx=$（ 11 ）

(ここまで)

補足： 一般に実積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ とは $\displaystyle\lim_{b\to\infty,\,a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx$ のことであり、$\displaystyle\lim_{a\to\infty}\int_{-a}^{a} f(x)\,dx$ は $Cauchy$ の主値といわれるもので両者は厳密な意味では異なる。単に $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ と書いてあったら前者の意味である。しかしこの問題の場合、別の理論から $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}$［ 5 ］$dx$ が収束することが知られているので、$Cauchy$ の主値を計算してもよい。