後期中間試験問題・応用数学（S4）

１． 次の問いに答えよ。ただし、<u>答のみ</u>。

注意： 特に断らない限り、答えが複素数値の場合 $a+ib$ （a, b は実数）の形で答えよ。

例えば、$\dfrac{1}{1+i}$ は $\dfrac{1}{2}-i\dfrac{1}{2}$

（1） $z=-1+i\sqrt{3}$ を極形式 $\left(re^{i\theta}\right)$ で表せ。ただし、$0 \leqq arg\, z < 2\pi$ とする。

（2） 複素数平面上の２点 $z_1=2+3i$, $z_2=4+5i$ の距離を求めよ。

（3） $\dfrac{1}{\left(1+i\sqrt{3}\right)^5}$ を計算せよ。　　（4） $\sqrt[3]{8i}$ を計算せよ。

（5） $\displaystyle\lim_{z\to i}\frac{z^2+1}{(z-i)(2z-i)}$ の値を求めよ。　　（6） $w=\dfrac{z}{z+1}$ のとき、$\dfrac{dw}{dz}$ を求めよ。

（7） $log\, 2i$ を求めよ。

２． *Fourier* 変換に関する次の文章の括弧に入る最も適切な式、数値を解答用紙にかけ。ただし、<u>答のみ</u>。なお、(　) は式、[　] は数値が入る。

一般に関数 $f(x)$ の *Fourier* 変換を $F(u)$ と表す。即ち、$F(u)=\mathcal{F}\left[f(x)\right](u)$

$f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$ のとき、$f'(x)=(\ 1\ )f(x)$ だから、$f(x)$ が満たす微分方程式は $(\ 2\ )=0$ となる。この両辺の *Fourier* 変換をとると、$F'(u)+(\ 3\ )=0$ となる。これを解くと、$F(u)=(\ 4\ )$，ただし、C は任意定数。ところで $F(0)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}(\ 5\ )\,dx$ であり、これと $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx=[\ 6\ ]$ を用いれば

$C=F(0)=[\ 7\ ]$ となる。$\therefore\ \mathcal{F}\left[e^{-\frac{x^2}{2}}\right](u)=(\ 8\ )$ … ①

$a>0$：定数のとき $g(x)=e^{-\frac{x^2}{a}}$ とすれば、$\mathcal{F}\left[g(x)\right](u)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}g(x)(\ 9\ )\,dx$ この積分で

$t=\sqrt{\dfrac{2}{a}}\,x$ と置換すれば $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}g(x)(\ 9\ )\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}(\ 10\ )\,dt$ さらに①を用いると

$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}(\ 10\ )\,dt=(\ 11\ )$ … ②　と $\mathcal{F}\left[e^{-\frac{x^2}{a}}\right](u)$ が求まる。さらに、$b>0$：定数のとき

$e^{-\frac{x^2}{a}}$ と $e^{-\frac{x^2}{b}}$ の畳込みの *Fourier* 変換を求めると

$\mathcal{F}\left[e^{-\frac{x^2}{a}}*e^{-\frac{x^2}{b}}\right](u)=\mathcal{F}\left[e^{-\frac{x^2}{a}}\right]\mathcal{F}\left[e^{-\frac{x^2}{b}}\right]=(\ 12\ )$

②から $\mathcal{F}^{-1}\left[e^{-\frac{a}{4}u^2}\right](x)=(\ 13\ )$ となるので、$\mathcal{F}^{-1}\left[(\ 12\ )\right](x)=(\ 14\ )$

$\therefore\ e^{-\frac{x^2}{a}}*e^{-\frac{x^2}{b}}=(\ 14\ )$

3．偏微分方程式の解法に関する次の文章の括弧に入る最も適切な式を解答用紙にかけ。
ただし、<u>答のみ</u>。注意：（ 5 ）は畳込みを表す記号を用いて答える。逆に（ 6 ）はその記号を用いてはだめ。
$f=f(x,t)$，K を正の定数とする。このとき、

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t}=K\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad (t>0,\ -\infty<x<\infty) & \cdots ① \\ f(x,0)=\phi(x) & \cdots ② \end{cases}$$

を $Fourier$ 変換を用いて解く。x に関する f の $Fourier$ 変換を $F(u,t)$ と表すとき、①の両辺の $Fourier$ 変換をとれば、$\dfrac{\partial F}{\partial t}=$（ 1 ）
これを解くと、$F=\Phi(u)$（ 2 ）となる。ただし、$\Phi(u)$ は u のみの関数で、②から
$\Phi(u)=\mathcal{F}[$（ 3 ）$]$　さらに $\mathcal{F}^{-1}[$（ 2 ）$]=$（ 4 ）だから、畳込みを用いれば $f(x,t)=$（ 5 ）
となる。いま、$\phi(x)=e^{-\frac{x^2}{3}}$ であるとき問題２(14) の結果を用いると、$f(x,t)=$（ 6 ）となる。

4．次の関数は正則であるか。正則ならば、導関数を求めよ。ただし、$z=x+iy$ とする。
（1） $f(z)=x\left(x^2-3y^2\right)+iy\left(3x^2-y^2\right)$　　（2） $f(z)=\dfrac{x}{x^2+y^2}-i\dfrac{y}{x^2+y^2}$ $(z\neq 0)$

5．方程式を満たす点 z は複素数平面上でどのような図形を描くか。ただし、$z=x+iy$ とする。
（1） $z\bar{z}-(2+i)z-(2-i)\bar{z}+3=0$　　（2） $(2-i)z+(2+i)\bar{z}-1=0$

6．次の値を求めよ。ただし、（1），（2）は<u>答のみ</u>。(最初の注意を守ること)
（1） $cos(\pi-i)$　　（2） $log\left(1+i\sqrt{3}\right)$　　（3） $(-2)^i$

7．次の各問いに答えよ。(z は複素数) ただし、（1），（2）は<u>答のみ</u>。
（1） $sin^{-1}z$ を対数関数を用いて表せ。　　（2） $cos^{-1}z$ を対数関数を用いて表せ。
（3） $sin^{-1}3$ の値を求めよ。(最初の注意を守ること)
（4） $cos^{-1}i$ の値を求めよ。(最初の注意を守ること)

C4 後中 2014

2014年度試験答案用紙

番号　　　氏名

1.(1) $E\left[\frac{X_1+X_2}{2}\right] = \frac12(E[X_1]+E[X_2]) = \frac12\left(\frac12+2\right) = \boxed{\frac54}$

(2) $V\left[\frac{X_1+X_2}{2}\right] = \frac14(V[X_1]+V[X_2]) = \frac14\left(\frac14+4\right) = \boxed{\frac{17}{16}}$

(3) [1] $E[X_1+X_2] = E[X_1]+E[X_2] = 2+3 = \boxed{5}$

[2] $V[X_1+X_2] = V[X_1]+V[X_2] = 2+3 = \boxed{5}$

(4) [1] i番目の数を X_i とすれば $E[X_i] = \frac{1+2+\cdots+13}{13} = 7$

だから $E[\bar X] = \boxed{7}$

[2] $V[X_i] = E[X_i^2] - (E[X])^2$

ここで $E[X_i^2] = \frac{1}{13}(1^2+2^2+\cdots+13^2) = 63$ だから

$V[X_i] = 14$

∴ $V[\bar X] = \frac{14}{26} = \boxed{\frac{7}{13}}$

(5) $\bar X$ は $N(10, \frac{4}{100})$ に従うから、$Z = \frac{\bar X - 10}{\frac15}$ は $N(0,1)$ に従う。∴ $P(\bar X \le 10.51) = P(Z \le 2.55) = \boxed{0.9946}$

(6) $\frac{24U^2}{20} = \frac65 U^2$ は自由度24の χ^2分布に従う。

$P(U^2 \le h) = P\left(\frac65 U^2 \le \frac65 h\right) = 0.5$

∴ $h = \frac56 \chi^2_{24}(0.5) = \frac56 \times 23.337 = \boxed{19.4475}$

(7) $h = t_{20}\left(\frac{0.05}{2}\right) = t_{20}(0.025) = \boxed{2.086}$

(8) [1] $E[X_i] = \frac16(1+2+\cdots+6) = \frac72$ $(i=1,2)$ だから

$E[X] = E[X_1] - E[X_2] = \boxed{0}$

[2] X_1, X_2 は互いに独立である。$E[X_i^2] = \frac{91}{6}$

∴ $V[X_i] = \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{35}{12}$

∴ $V[X] = V[X_1] + V[X_2] = \boxed{\frac{35}{6}}$

(9) [1] $E[X_1] - 2E[X_2] = 8\cdot\frac12 - 2\cdot12\cdot\frac14 = \boxed{-2}$

[2] $V[X_1] + 4V[X_2] = 8\cdot\frac12\cdot\frac12 + 4\cdot12\cdot\frac14\cdot\frac34$

$= 2+9 = \boxed{11}$

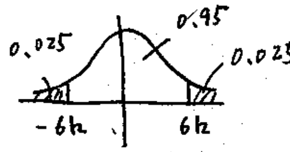
2. $T = \frac{\bar X-\mu}{\sqrt{\frac{U^2}{36}}}$ は自由度35の t分布に従う。

$P\left(\left|\frac{\bar X-\mu}{\sqrt{U^2}}\right| < h\right) = P\left(\left|\frac{\bar X-\mu}{\sqrt{\frac{U^2}{36}}}\right| < 6h\right) = 0.95$

だから $P\left(\frac{\bar X-\mu}{\sqrt{\frac{U^2}{36}}} \ge 6h\right) = \frac12(1-0.95) = 0.025$

∴ $6h = t_{35}(0.025) = 2.030$

∴ $h = 0.338$



⑤

3. $\frac{\frac{U_1^2}{2}}{\frac{U_2^2}{5}} = \frac52\frac{U_1^2}{U_2^2}$ は自由度 (24, 19) の F分布に従う。

$P(U_1^2 < mU_2^2) = P\left(\frac{U_1^2}{U_2^2} < m\right) = P\left(\frac52\frac{U_1^2}{U_2^2} < \frac52 m\right)$

$= 1 - P\left(\frac52\frac{U_1^2}{U_2^2} \ge \frac52 m\right) = 0.975$ だから

$P\left(\frac52\frac{U_1^2}{U_2^2} \ge \frac52 m\right) = 0.025$ ∴ $\frac52 m = F_{24,19}(0.025)$

$m = \frac25 \times 2.452 = 0.9808$

⑤

4.(1) 初項1, 公比 $r = 1-p$ の無限等比級数で、$0<r<1$ だから

$\sum_{n=0}^{\infty}(1-p)^n = \frac{1}{1-(1-p)} = \boxed{\frac1p}$

(2) $E[X] = \sum_{n=0}^{\infty} np(1-p)^n = p(1-p)\sum_{n=1}^{\infty} n(1-p)^{n-1}$

ここで(1)から $\frac{d}{dp}\sum_{n=0}^{\infty}(1-p)^n = \sum_{n=1}^{\infty} n(1-p)^{n-1}\cdot(-1) = -\frac{1}{p^2}$

より $\sum_{n=1}^{\infty} n(1-p)^{n-1} = \frac{1}{p^2}$ ∴ $E[X] = \frac{1-p}{p}$

③

(3) $P(Z=m) = P(X_1+X_2=m)$

$= \sum_{n=0}^{m} P(X_1=n)P(X_2=m-n)$

$= \sum_{n=0}^{m} p(1-p)^n\cdot p(1-p)^{m-n} = \sum_{n=0}^{m} p^2(1-p)^m$

$= (m+1)p^2(1-p)^m$

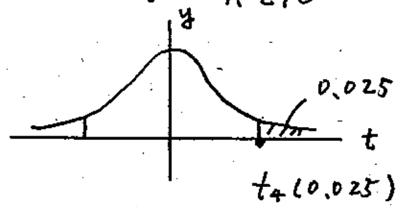
④

5.(1) $\bar x = \frac15(26.3+25.5+\cdots+23.3) = 25.1$

(2) $\overline{x^2} = 631.306$ ∴ $s^2 = \overline{x^2} - (\bar x)^2 = 1.296$

∴ $u^2 = \frac54 s^2 = 1.62$

(3) $\frac{\bar X-\mu}{\sqrt{\frac{U^2}{5}}}$ は自由度4 の t分布に従うから、μの95%信頼区間は



$\bar x - t_4(0.025)\sqrt{\frac{u^2}{5}} \le \mu \le \bar x + t_4(0.025)\sqrt{\frac{u^2}{5}}$

$(t_4(0.025) = 2.776)$

$23.52 \le \mu \le 26.68$

④

6. $E[T] = \sum_{i=1}^{m} a_i E[X_i] = \mu\sum_{i=1}^{m} a_i = \mu$

∴ $\mu \neq 0$ より $\sum_{i=1}^{m} a_i = 1$

②

7.(1) $\int_0^\infty\int_0^\infty ke^{-2x-3y}\,dy\,dx = k\left[-\frac12 e^{-2x}\right]_0^\infty\left[-\frac13 e^{-3y}\right]_0^\infty$

$= \frac{k}{6} = 1$ ∴ $\boxed{k=6}$

②

(2) $f_1(x) = \int_0^\infty ke^{-2x-3y}\,dy$ $(x>0)$

$= 6e^{-2x}\left[-\frac13 e^{-3y}\right]_0^\infty = 2e^{-2x}$

(3) ∴ $f_1(x) = \begin{cases} 2e^{-2x} & (x>0) \\ 0 & (x\le 0) \end{cases}$

④

(3) $f_2(y) = \int_0^\infty 6e^{-2x-3y}\,dx$ $(y>0)$

$= 6e^{-3y}\left[-\frac12 e^{-2x}\right]_0^\infty = 3e^{-3y}$

∴ $f_2(y) = \begin{cases} 3e^{-3y} & (y>0) \\ 0 & (y\le 0) \end{cases}$

④

8. $E[x_i] = \boxed{\mu}$ [1], $V[x_i] = \boxed{\sigma^2}$ [2], $E[\bar{x}] = \boxed{\mu}$ [3],

$V[\bar{x}] = \boxed{\dfrac{\sigma^2}{n}}$ [4]

$i = j \Rightarrow E[x_i x_i] = E[x_i^2] = V[x_i] + (E[x_i])^2$

$= \boxed{\sigma^2 + \mu^2}$ [5]

$i \neq j \Rightarrow E[x_i x_j] = E[x_i]\,E[x_j] = \boxed{\mu^2}$ [6]

$E[(\bar{x})^2] = V[\bar{x}] + (E[\bar{x}])^2 = \boxed{\dfrac{\sigma^2}{n} + \mu^2}$ [7]

$E[x_i \bar{x}] = \dfrac{1}{n} E[x_i \sum_{j=1}^{n} x_j] = \dfrac{1}{n} E[x_i^2] + \dfrac{n-1}{n}\mu^2$

$= \dfrac{1}{n}(\sigma^2 + \mu^2) + \dfrac{n-1}{n}\mu^2 = \boxed{\dfrac{\sigma^2}{n} + \mu^2}$ [8]

$\therefore E[\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2] = \sum_{i=1}^{n}\{E[x_i^2] - 2E[x_i\bar{x}] + E[(\bar{x})^2]\}$

$= \sum_{i=1}^{n}\{\sigma^2 + \mu^2 - 2(\dfrac{\sigma^2}{n} + \mu^2) + (\dfrac{\sigma^2}{n} + \mu^2)\}$

$= \sum_{i=1}^{n} \boxed{(1 - \dfrac{1}{n})\sigma^2}$ [9] $= \boxed{(n-1)\sigma^2}$ [10]

$\therefore E[v^2] = \boxed{\sigma^2}$ [11], $E[s^2] = \boxed{\dfrac{n-1}{n}\sigma^2}$ [12]

チェビシェフの不等式より

$P(|\bar{x} - \boxed{\mu}| < \varepsilon) \geq \boxed{1 - \dfrac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}}$ [13] [14]

$\because V[\bar{x}] = \dfrac{\sigma^2}{n}$