2014年度前期末試験問題・応用数学（S4）

１．次の（　）に入るもっとも適切な数値、数式などを解答用紙にかけ。ただし、答のみ。
$Fourier$ 級数における定数項を c_0，余弦関数の係数を a_n，正弦関数の係数を b_n と表す。
周期関数 $f(x)$ の周期は４で $0 \leqq x < 2$ のとき、$f(x) = 2 - x$ とする。$f(x)$ の $Fourier$ 正弦級数を求める。$c_0 = 0$，$a_n = 0$ $(n = 1, 2, \cdots)$ となる。また、$b_n = \int_0^2$（１）$dx =$（２）となるから、求める級数は $f(x) =$（３）となる。次に $f(x)$ の $Fourier$ 余弦級数を求める。
$b_n = 0$ $(n = 1, 2, \cdots)$ となる。$c_0 =$（４）であり、$a_n = \int_0^2$（５）$dx =$（６）となる。
$m = 1, 2, \cdots$ のとき、$a_{2m} =$（７），$a_{2m-1} =$（８）となるから、求める級数は $f(x) =$（９）となる。最後に、$-2 \leqq x < 0$ で $f(x) = 0$ のときの $Fourier$ 級数を求めると、$c_0 =$（10），
$a_n =$（11）なので、$m = 1, 2, \cdots$ のとき、$a_{2m} =$（７），$a_{2m-1} =$（12）となる。また、
$b_n =$（13）であるから、$f(x)$ の $Fourier$ 級数は、$f(x) =$（14）となる。
注意：（９），（14）は明らかに０となる項を除いたものを答えよ。そうでない場合は点を与えない。

２．周期関数 $f(x) = e^{ax}$ $(-1 \leqq x < 1)$，$f(x+2) = f(x)$ の複素 $Fourier$ 級数を求めよ。ただし、a は実数の定数で $a \neq 0$ とする。

３．関数 $f(x) = \begin{cases} x+1 & (|x| \leqq 1) \\ 0 & (|x| > 1) \end{cases}$ の $Fourier$ 変換 $F(u)$ を求めよ。

４．問題３で求めた $Fourier$ 変換に反転公式を用いて、$\int_0^\infty \frac{sin^2 x}{x^2} dx$ の値を求めよ。

５．熱伝導方程式 $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ $(0 < x < 1,\ t > 0)$ … ①
の解 $u(x, t)$ で、次の条件を満たす恒等的に０でない解を求めようと思う。
$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(1, t) = 0$ … ②
$u(x, 0) = sin^2 \pi x$ … ③
次の各問いに答えよ。
（1）次の文章の［　］に入るもっとも適切な答えを解答欄に書け。ただし、答のみ。
$u = X(x)\,T(t)$ とし①に代入すると［１］$= \frac{T'}{T} = \lambda$（λ は定数），T は恒等的に０でないから、条件②から $X'(0) = X'$（［２］）$= 0$ となる。［１］$= \lambda$ の解でこの条件を満たす恒等的に０でない解は $\lambda > 0$ のとき存在しない。$\lambda = 0$ のとき $X =$［３］が条件を満たす解である。ただし、B は０でない任意定数である。$\lambda < 0$ のとき条件を満たすのは $X = A$［４］ただし、A は０でない任

意定数で、n は１以上の整数である。$\cos 0=1$ だから $\lambda=0$ のときも含めて $X=C$［ 4 ］が②の条件を満たす X となる。ただし、任意定数を改めて C と書いた。このとき、$T'=\lambda T$ の一般解は $T=D$［ 5 ］ ただし、D は０でない任意定数である。これらの n に関する線形結合も形式的に②の条件を満たす①の解であるから、任意定数をまとめて表せば、$u(x,t)=\sum_{n=[\ 6\ ]}^{\infty} C_n$［ 7 ］ となる。（注意：［ 7 ］は任意定数含まず）

（2） （1）の続きを解答し、$u(x,t)$ を求めよ。

（注意： あくまで（1）の続きとして解答をかけ。つまり、$u(x,t)=\sum_{n=[\ 6\ ]}^{\infty} C_n$［ 7 ］からスタートせよ）

6． $f(x)$ は区分的に滑らかな周期 $2l$ $(l>0)$ の周期関数とし、その $Fourier$ 級数を $c_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\dfrac{n\pi x}{l}+b_n\sin\dfrac{n\pi x}{l}\right)$ とするとき、次の（ ）に入る最も適切な数値、数式を解答用紙にかけ。ただし、答のみ。

m, n が自然数のとき、

$$\int_{-l}^{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx=\int_{-l}^{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx=\int_{-l}^{l}\cos\frac{m\pi x}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx=(\ 1\ ),$$

$$\int_{-l}^{l}\cos\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx=\int_{-l}^{l}\sin\frac{m\pi x}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx=\begin{cases}(\ 2\ ) & (m=n)\\ (\ 1\ ) & (m\neq n)\end{cases}$$

となる。従って、$\int_{-l}^{l}\sum_{n=1}^{N}\left(a_n\cos\dfrac{n\pi x}{l}+b_n\sin\dfrac{n\pi x}{l}\right)^2dx=(\ 3\ )$ となる。また、

$$\int_{-l}^{l}\left\{f(x)\sum_{n=1}^{N}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)\right\}dx=(\ 4\ ),\quad \int_{-l}^{l}c_0f(x)\,dx=(\ 5\ )$$ となる。

以上より、$0\leqq\int_{-l}^{l}\left\{f(x)-\left(c_0+\sum_{n=1}^{N}\left(a_n\cos\dfrac{n\pi x}{l}+b_n\sin\dfrac{n\pi x}{l}\right)\right)\right\}^2dx$

$$=\int_{-l}^{l}\{f(x)\}^2dx-2\int_{-l}^{l}f(x)\left(c_0+\sum_{n=1}^{N}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)\right)dx$$

$$+\int_{-l}^{l}\left(c_0+\sum_{n=1}^{N}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)\right)^2dx$$

$=\int_{-l}^{l}\{f(x)\}^2dx-((\ 6\ ))$ $\quad\therefore\ \dfrac{1}{l}\int_{-l}^{l}\{f(x)\}^2dx\geqq(\ 7\ )$ ここで、$N\to\infty$ とすれば

$\dfrac{1}{l}\int_{-l}^{l}\{f(x)\}^2dx\geqq(\ 8\ )$ この不等式を $Bessel$ の不等式という。さらに $f(x)$ が連続だと等号が成り立ち、$\dfrac{1}{l}\int_{-l}^{l}\{f(x)\}^2dx=(\ 8\ )$ となる。これを $Parseval$ の等式という。

注意： $f(x)$ や積分は含まれない答えをかく。数値以外は l や $Fourier$ 係数の式である。

7． $f(x)=x^2\ (|x|\leqq1)$, $f(x+2)=f(x)$ なる周期関数に関して、次の各問いに答えよ。

（1） $f(x)$ の $Fourier$ 級数を求めよ。

（2） $f(x)$ は連続で、区分的に滑らかだから*Parseval* の等式が成り立つ。これを用いて $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$ の値を求めよ。