2014年度前期中間試験問題・応用数学（S4） 2014年6月6日

１．次の関数の $Laplace$ 変換を求めよ。独立変数は s とする。ただし、<u>答のみ</u>。

（1） $(1-t)\,U(t-1)$ （単位ステップ関数） （2） $\cosh t$

（3） $1-U(t-1)+U(t-2)-U(t-3)$ （4） $\cos 3t$ （5） $\cos^2 t$

（6） $e^{-2t}\sin 3t$ （7） $t\sin 2t$ （8） $\dfrac{\sinh 4t}{t}$ （9） $t * t^2$ （畳込み）

（10） $\delta(t)$ （デルタ関数） （11） $t^3 e^{-3t}$ （12） $t\sinh t$

２．次の関数の逆 $Laplace$ 変換を求めよ。独立変数は t とする。ただし、<u>答のみ</u>。

（1） $\dfrac{s}{s^2+4}$ （2） $\dfrac{1}{s^2(s^2+1)}$ （3） $\dfrac{1}{s^2+2s+2}$ （4） 1

（5） $\dfrac{e^{-2s}}{s^3}$ （6） $\dfrac{1}{s^2(s-1)}$ （7） $\dfrac{1}{s(s^2+1)}$ （8） $\dfrac{e^{-\pi s}}{s^2+4}$

（9） $\dfrac{s^2-1}{(s^2+1)^2}$ （10） $\dfrac{s-3}{s^2-8s+16}$ （11） $\dfrac{s+3}{(s-2)(s+1)}$ （12） $\dfrac{e^{-s}}{s^5}$

３． $F(s)=\dfrac{1}{s^3+a^3}$ $(a>0)$ について、次の問いに答えよ。

（1） 次の文章の［　］に入る最も適切な答えを解答用紙にかけ。ただし、<u>答のみ</u>。

$F(s)$ を部分分数に分解すると $F(s)=\dfrac{[\ 1\ ]}{s+a}+\dfrac{[\ 2\ ]s+[\ 3\ ]}{s^2-as+a^2}$ となる。

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{[\ 1\ ]}{s+a}\right]=[\ 4\ ]$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{[\ 2\ ]s+[\ 3\ ]}{s^2-as+a^2}\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{[\ 2\ ]([\ 5\ ])+\dfrac{1}{2a}}{([\ 5\ ])^2+\dfrac{3}{4}a^2}\right]$$

ここで、$\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{[\ 2\ ]([\ 5\ ])}{([\ 5\ ])^2+\dfrac{3}{4}a^2}\right]=[\ 6\ ]$, $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{\dfrac{1}{2a}}{([\ 5\ ])^2+\dfrac{3}{4}a^2}\right]=[\ 7\ ]$

$\therefore\ \mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{[\ 2\ ]s+[\ 3\ ]}{s^2-as+a^2}\right]=\dfrac{2}{3a^2}[\ 8\ ]\sin\left(\dfrac{\sqrt{3}\,a\,t}{2}-[\ 9\ ]\right)$ となる。ただし、$\mathcal{L}^{-1}$ は逆 $Laplace$ 変換を表す。

以上より、$\mathcal{L}^{-1}[F(s)]=[\ 4\ ]+\dfrac{2}{3a^2}[\ 8\ ]\sin\left(\dfrac{\sqrt{3}\,a\,t}{2}-[\ 9\ ]\right)$ となる。

（2） $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{F(s)}{s}\right]$ を求めよ。解法もかけ。なお必要ならば以下の公式を用いてよい。

$(a,b)\neq(0,0)$ を満たす定数に対して

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\,(a\cos bx + b\sin bx)$$

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\,(a\sin bx - b\cos bx)$$

4． 未知関数 $x=x(t)$ の微分方程式 $x''+x'+x=\cos t$ ，$x(0)=1$ ，$x'(0)=0$ を $Laplace$ 変換を用いた解法が次の文章である。括弧に入る最も適切な答えを解答用紙にかけ。ただし、<u>答のみ</u>。なお、（　）は文字式、関数、［　］は数値が入る。

$\mathcal{L}[x(t)]=X(s)$ と表す。微分方程式の両辺の $Laplace$ 変換をとり、$X(s)$ について解くと

$X(s)=(\ 1\ )+\dfrac{1}{s^2+1}$ となる。$\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s^2+1}\right]=(\ 2\ )$ … ① である。（ 1 ）の分母を平方完成

すると $((\ 3\ ))^2+\dfrac{3}{4}$ となるので $(\ 1\ )=\dfrac{(\ 3\ )}{((\ 3\ ))^2+\dfrac{3}{4}}+\dfrac{[\ 4\ ]}{((\ 3\ ))^2+\dfrac{3}{4}}$ と変形でき

$\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{(\ 3\ )}{((\ 3\ ))^2+\dfrac{3}{4}}\right]=(\ 5\ )$ … ②　　$\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{[\ 4\ ]}{((\ 3\ ))^2+\dfrac{3}{4}}\right]=(\ 6\ )$ … ③

①、②、③から $x(t)=(\ 7\ )$ となる。さらに（ 5 ）+（ 6 ）を三角関数の合成を用いて変形すると

$(\ 5\ )+(\ 6\ )=\dfrac{2}{\sqrt{3}}(\ 8\ )\cos([\ 9\ ]t+[\ 10\ ])$ となる。

5． 次の右辺の広義積分は $p>0$ のとき収束することが知られており、これを左辺の記号で表す。この関数をガンマ関数という。

$$\Gamma(p)=\int_0^{\infty} e^{-t}\,t^{p-1}\,dt$$

（1） $\Gamma(p)=(p-1)\,\Gamma(p-1)$ が成り立つことを証明せよ。ただし、$p>1$ とする。

（2） $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$ を用いてよいので $\Gamma\left(\dfrac{5}{2}\right)$ の値を求めよ。

（3） $\mathcal{L}\left[t\sqrt{t}\,\right](s)$ を求めよ。ただし、$s>0$ とする。