2016年度応用数学B(M4) 学年末試験問題

全体の注意：解法を書く検定の問題では，棄却域または検定統計量の実現値が誤っている場合は，大幅に減点するか０点とする。また，授業中に注意したように必要な事項を述べていない解答も減点するか０点とする。

１．ある部品の製造工場で，これまで不良率(不良品の比率)は 0.03 であった。最近，製造機械が老朽化してきたため，150 個の製品を無作為に抜き取って検査したところ，５個の不良品があった。これについて次の問いに答えよ。ただし，答のみ。(14点)

(1) 次の計算は最近の不良率の 95% 信頼区間を求めるものである。[　　] に入る最も適切な答えを解答用紙にかけ。

(ここから) 標本の大きさが十分大きいとして考える。$\hat{P}$ を標本比率，p を母比率とすれば

$$Z=\frac{\hat{P}-p}{\sqrt{\dfrac{[\ 2\ ](1-[\ 2\ ])}{[\ 1\ ]}}}$$ は近似的に [3] に従うので，([2]：$\hat{P}$ の実現値)

表から $P(|Z|\leqq[\ 4\ ])=0.95$ であるから $\hat{P}$ の実現値を代入すれば p の 95% 信頼区間は [5] $\leqq p\leqq$ [6] となる。([5]，[6] は有効数字３桁の近似値，四捨五入) (ここまで)

(2) 最近の不良率は以前より大きくなったのか検定を行った。次の計算の [　　] に入る最も適切な答えを解答用紙にかけ。

(ここから) 帰無仮説 H_0：[1]，対立仮説 H_1：[2] (p：母比率＝不良率)

[3] であると仮定すると，検定統計量 $Z=\dfrac{\hat{P}-[\ 5\ ]}{\sqrt{\dfrac{[\ 5\ ](1-[\ 5\ ])}{[\ 4\ ]}}}$ は近似的に [6] に従う。なお $\hat{P}$ は標本比率である。有意水準を 5% とすれば棄却域は [7] となる。Z の実現値を計算すれば $z=$ [8] となり，これは棄却域に入らないので H_0 は受容される。つまり不良率は以前より大きくなったとは言えない。([8] は小数第３位までの近似値) (ここまで)

２．ある年度の統一試験の数学の得点は，正規分布 $N(132.22,\sigma^2)$ に従うことが分かっている。ある学校で 80 人について同一問題で試験を実施したところ，平均点は 137.25，不偏分散は 24.06^2 となった。この学校の数学の学力は全国平均と異なるといえるか。有意水準 0.01 で検定せよ。なお，標本の大きさは十分大きいと考えよ。(9点)

３．次の値を F 分布表から小数第３位まで求めよ。ただし，答のみ。(2点)

(1) $F_{3,8}(0.95)$　　(2) $F_{6,9}(0.975)$

４．$N(\mu,\sigma^2)$ から大きさ５の標本を無作為に抽出したら次の値を得た。

26.3　25.5　24.3　26.1　23.3

母分散 σ^2 の 95% 信頼区間および 99% 信頼区間を求める次の計算の (　　) に入る最も適切な答えを解答用紙にかけ。ただし，答のみ。(8点)

(ここから) 標本分散を S^2 とすれば $X=\dfrac{(\ 1\ )S^2}{\sigma^2}$ は（ 2 ）に従う。まず 95% 信頼区間を求める。表から $P\big((\ 3\ )\leqq X\leqq (\ 4\ )\big)=0.95$ であるから（ 3 ）$\leqq X\leqq$（ 4 ）を σ^2 について解き S^2 の実現値 $s^2=$（ 5 ）を代入すれば 95% 信頼区間は（ 6 ）$\leqq \sigma^2 \leqq$（ 7 ）と求まる。同様にして 99% 信頼区間は（ 8 ）$\leqq \sigma^2 \leqq 31.30$ と求まる。
（（ 6 ）~（ 8 ）は小数第２位までの近似値）(ここまで)

5．$N(\mu,\sigma^2)$ から，次の無作為標本を得た。母分散は 1.5 といってよいか。第１種の誤りを犯す確率を 0.05 として検定せよ。(8点)
53, 49, 48, 52, 51, 47

6．ある学校の数学の点数は男子が $N(\mu_1,\sigma_1^2)$ に，女子が $N(\mu_2,\sigma_2^2)$ にそれぞれ従う。男子，女子 50 人ずつを互いに無関係に無作為に抽出して点数を調べたところ

	平均	不偏分散
男子	65	15^2
女子	73	12^2

であった。この試験において男女の平均に差があると認められるか，有意水準 0.05 で検定する次の計算の（　）に入る最も適切な答えを解答用紙にかけ。ただし，答のみ。(9点)

(ここから) $\overline{X_1},\overline{X_2}$：をそれぞれ男子，女子の標本平均，$U_1^2,U_2^2$：をそれぞれ男子，女子の不偏分散とする。帰無仮説 H_0：（ 1 ），対立仮説 H_1：（ 2 ）であり，（ 3 ）であると仮定すると標本の大きさが十分大きいと考えられるので，検定統計量 $Z=\dfrac{\overline{X_1}-\overline{X_2}}{\sqrt{(\ 4\ )}}$ は近似的に（ 5 ）に従う。H_1 の形から棄却域は（ 6 ）となる。Z の実現値 z を計算すれば $z=$（ 7 ）となり，これは棄却域に（ 8 ）ので H_0 は（ 9 ）される。(ここまで)
注意：（ 7 ）は小数第３位までの近似値，（ 9 ）は（ 6 ）~（ 8 ）すべて正解でないと点を与えない。

7．メンデルは，エンドウ豆の交配実験において，理論的に度数分布は 9:3:3:1 になると考えた。下の表の実験結果は，理論に適合しているかどうか有意水準 0.05 で検定したい。
帰無仮説 H_0：母集団比率は理論どおりである。 対立仮説 H_1：母集団比率は理論どおりでない。
として次の問いに答えよ。なお，理論の比率は下の表の左からのものを表している。
ただし，答のみ。(7点)

表現	黄･丸	黄･しわ	緑･丸	緑･しわ	合計
観測度数	315	101	108	32	556

(1) H_0 が真であると仮定して期待度数の表を作成せよ。(近似値で答えない)
(2) 検定作業に関する次の計算の［　］に入る最も適切な答えを解答用紙にかけ。

(ここから) 検定等計量を $X=\sum\dfrac{(\text{観測度数}-\text{期待度数})^2}{\text{期待度数}}$ とすれば，H_0 が真であると仮定すると

X は近似的に［ 1 ］に従う。棄却域は表から数値を引いて［ 2 ］となる。X の実現値 x を計算すると $x=$［ 3 ］となり，これは棄却域に［ 4 ］ので H_0 は［ 5 ］される。(ここまで)

注意：［ 3 ］は小数第 4 位までの近似値を答える。［ 4 ］，［ 5 ］は両方正解で点を与える。

8．外見では区別できない 2 つの袋 A，B があり，A には白玉 4 個と黒玉 1 個，B には白玉 2 個と黒玉 3 個が入っている。一方の袋を無作為に選び，選んだ袋から復元抽出で 4 回玉を取り出すとき，白玉が 3 回以上出れば，選んだ袋は A であると判定する。帰無仮説を H_0：選んだ袋は A である。としたとき，次の問いに答えよ。(10点)

(1) この場合の対立仮説 H_1 を肯定的に(〜である)答えよ。ただし，答のみ。

(2) 第 1 種の誤りを犯す確率を求めよ。　(3) 第 2 種の誤りを犯す確率を求めよ。

9． 3 つのクラス A，B，C の試験に合格した学生と不合格になった学生の人数を調べたところ，下の表のようになった。クラスによる合否の違いがあるか，有意水準 0.05 で検定しようと思う。次の問いに答えよ。ただし，答のみ。(8点)

	A	B	C	合計
合格	38	32	42	112
不合格	10	16	6	32
合計	48	48	48	144

(1) 帰無仮説「H_0：試験の合否とクラスは関係ない(独立)」とする。H_0 が真であると仮定して期待度数の表を作成せよ。(近似値で答えない。また約分したものを答える)

(2) 検定作業に関する次の計算の［　］に入る最も適切な答えを解答用紙にかけ。

(ここから) 検定等計量を $X=\sum \dfrac{(\text{観測度数}-\text{期待度数})^2}{\text{期待度数}}$ とすれば，H_0 が真であると仮定すると X は近似的に［ 1 ］に従う。棄却域は表から数値を引いて［ 2 ］となる。X の実現値 x を計算すると $x=$［ 3 ］となり，これは棄却域に［ 4 ］ので H_0 は［ 5 ］される。(ここまで)

注意：［ 3 ］は小数第 4 位までの近似値を答える。［ 4 ］，［ 5 ］は両方正解で点を与える。

10．ある薬剤を飲むことにより，血圧(単位 mmHg)は上昇する可能性があるとされている。そのため薬剤を飲んだ人と，飲んでいない人について血圧の測定を行ったところ，次の表の結果を得た。

	標本の大きさ	標本平均	不偏分散
飲んだ人	$n_1=7$	$\overline{x_1}=132.0$	$u_1^2=4.2$
飲んでいない人	$n_2=6$	$\overline{x_2}=125.0$	$u_2^2=3.5$

このとき，次の問いに答えよ。ただし，この薬剤を飲んだ人の血圧と飲んでいない人の血圧はそれぞれ $N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$N(\mu_2,\sigma_2^2)$ に従っているものとする。(16点)

(1) 飲んだ人と飲んでいない人の血圧の母分散は等しいと言えるか。有意水準 0.05 で検定せよ。

(2) この薬剤を飲むことによって血圧が上昇するといえるか。有意水準 0.05 で検定せよ。なお，上の (1) の結論により次のいずれかの方法で検定せよ。

Case1：$\sigma_1^2=\sigma_2^2$ と考えられるとき。

帰無仮説 $\mathrm{H}_0 : \mu_1 = \mu_2$ が真であると仮定すると，$T = \dfrac{\overline{X_1} - \overline{X_2}}{\sqrt{U^2 \left(1/n_1 + 1/n_2 \right)}}$ は

$t\left(n_1 + n_2 - 2\right)$ に従う。ここで $U^2 = \dfrac{\left(n_1 - 1\right) {U_1}^2 + \left(n_2 - 1\right) {U_2}^2}{n_1 + n_2 - 2}$ である。

Case2： ${\sigma_1}^2 \neq {\sigma_2}^2$ と考えられるとき。

帰無仮説 $\mathrm{H}_0 : \mu_1 = \mu_2$ が真であると仮定すると，$T = \dfrac{\overline{X_1} - \overline{X_2}}{\sqrt{{U_1}^2/n_1 + {U_2}^2/n_2}}$ は近似的に

$t(\nu)$ に従う。ここで $\nu = \dfrac{\left({U_1}^2/n_1 + {U_2}^2/n_2 \right)^2}{\dfrac{{U_1}^4}{{n_1}^2\left(n_1 - 1\right)} + \dfrac{{U_2}^4}{{n_2}^2\left(n_2 - 1\right)}}$ であり，ν が整数でないときは，

最も近い整数値とする。

１１．東京工業大学は到達度試験で３２４点以上とらないと合格できないことが過去のデータから分かっている。Ｍ君の５回模擬試験を行った成績は次のようであった。

２９０，　３３１，　３１５，　３０４，　３２５

Ｍ君は合格困難と言えるか。有意水準 ０．０５ で検定せよ。なお，Ｍ君の点数は $N\left(\mu, \sigma^2\right)$ に従っているものとする。(9点)