2016年度応用数学B(M4) 後期中間試験問題

1．正規母集団 $N(\mu, 20)$ から無作為抽出した大きさ30の無作為標本の不偏分散について，次の計算の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙にかけ。ただし，答のみ。(9点)

(ここから) U^2 を不偏分散とすれば $X=\dfrac{(\ 1\ )U^2}{20}$ は自由度（ 2 ）の（ 3 ）分布に従う。いま $P\left(0\leqq U^2\leqq k\right)=0.5$ なる定数を求める。$P\left(0\leqq U^2\leqq k\right)=P\left(0\leqq X\leqq (\ 4\ )k\right)$ より $(\ 4\ )k=\chi^2_{(\ 2\ )}((\ 5\ ))$ となる。表から $\chi^2_{(\ 2\ )}((\ 5\ ))=(\ 6\ )$ であるから，これらより $k=(\ 7\ )$ と求まる。（（ 7 ）は小数第３位までの近似値）(ここまで)

2． t 分布表から，次の値を求めよ。ただし，答のみ。(3点)

(1) $t_{12}(0.01)$　　(2) $t_3(0.25)$　　(3) $t_{25}(0.10)$

3．次の問いに答えよ。ただし，答のみ。(4点)

(1) 確率変数 T が $t(9)$ に従うとき，次を満たす t_0, t_1 を求めよ。

[1] $P\left(T\leqq t_0\right)=0.05$　　[2] $P\left(|T|\geqq t_1\right)=0.05$

(2) 確率変数 Z が $N(0,1)$ に従うとき，次を満たす z_0, z_1 を求めよ。

[1] $P\left(Z\geqq z_0\right)=0.10$　　[2] $P\left(|z|\leqq z_1\right)=0.95$

4． F 分布表から，次の値を求めよ。ただし，答のみ。(3点)

(1) $F_{7,20}(0.025)$　　(2) $F_{6,5}(0.05)$　　(3) $F_{40,8}(0.05)$

5．ある野菜１個の重さ(単位g)が正規分布 $N\left(200, 25^2\right)$ に従っているという。この野菜を重さの順に３つの階級に分け，それぞれの階級の野菜の数がほぼ同じになるようにするには，何 g と何 g にで区切ったらよいか。その境界値を小数点以下を四捨五入して整数値で求めよ。(6点)

6．連続型確率変数 X が $\chi^2(14)$ に従うとき，$P\left(5.629\leqq X\leqq 21.064\right)$ の値を表から求めよ。(6点)

7． X の確率密度関数 $f(x)$ が $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\exp\left(-\dfrac{x}{2}\right) & (x\geqq 0)\\ 0 & (x<0)\end{cases}$ であるとき，次の各問いに答えよ。ただし，(1)，(2)，(3)，(6) は答のみ。(23点)

(1) $E[X]$ の値を求めよ。　(2) $E\left[X^2\right]$ の値を求めよ。　(3) $V[X]$ の値を求めよ。

(4) X の歪度 $\dfrac{1}{\sigma^3}E\left[(X-\mu)^3\right]$ を求めよ。なお，$\mu=E[X], \sigma=\sqrt{V[X]}$ である。

(5) X の尖度 $\dfrac{1}{\sigma^4}E\left[(X-\mu)^4\right]$ を求めよ。μ, σ は上と同じである。

(6) X のモーメント(積率) 母関数 $M(t)=E\left[e^{tX}\right]$ $\left(t<\dfrac{1}{2}\right)$ を求めよ。

(7) X の n 次モーメント $\mu_n=E\left[X^n\right]$ (n は自然数)を求めよ。

8．次の問いに答えよ。ただし，答のみ。(21点)

(1) 正規母集団 $N(12,\ 9)$ から大きさ 100 の標本を無作為に抽出するとき，$\overline{X}\geqq 12.141$ となる確率を求めよ。

(2) 1枚の硬貨を2回投げる。1回目が表のときは $X=0$，裏のときは $X=1$ とする。また，2回目が表のときは $Y=1$，裏のときは $Y=2$ とする。$Z=X+Y$ とするとき，次の文章の [ ] に入る最も適切な答えを解答用紙にかけ。

(ここから) $P(Z=1)=$[1]，$P(Z=2)=$[2]，$P(Z=3)=$[3] である。また，$E[Z]=$[4]，$V[Z]=$[5] となる。

(3) 1，2，3 の数字が1つずつ書かれたカードから，1枚ずつ2回復元抽出を行い，1回目の数字を X とする。また，1回目が1以外であれば2回目の数字を Y とし，1回目が1であれば1回目と2回目の和を Y とする。このとき，次の [1]～[5] の値を求め，[6] は理由を述べて答えよ。[1]～[4] はすべて正解して2点。

[1] $P(Y=1)$　　[2] $P(Y=2)$　　[3] $P(Y=3)$　　[4] $P(Y=4)$

[5] $P(X=1,\ Y=2)$　　[6] X と Y は互いに独立であるか独立でないか答えよ。

注意：[6] 独立か否かは「互いに独立であるとは」の定義に従って判定すること。

(4) 1つのさいころを2投げて，1回目と2回目に出る目の数をそれぞれ X，Y とし，$Z=X-2Y$ とする。このとき，次の各値を求めよ。

[1] $E[X]$　　[2] $V[X]$　　[3] $E[Z]$　　[4] $V[Z]$

(5) 離散型確率変数 X_1，X_2 は互いに独立で，それぞれ二項分布 $B\left(8,\ \dfrac{1}{2}\right)$，$B\left(12,\ \dfrac{1}{4}\right)$ に従うとき，次の各値を求めよ。　[1] $E\left[X_1-X_2\right]$　　[2] $V\left[X_1-X_2\right]$

(6) 次の計算の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙にかけ。

(ここから) ある学校の学生 100 人を無作為に選び，1日あたりの睡眠時間 (時間) を聞いたところ平均が 6.25，不偏分散が 1.52 であった。標本の大きさが十分大きいので μ を母平均とすれば，統計量 $Z=\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sqrt{\dfrac{1.52}{[\ 1\ ]}}}$ は $N(0,\ 1)$ に近似的に従う。表から標準正規分布の上側 [2] 点を求めると $z_{[\ 2\ ]}=1.9600$ となるから，母平均 μ の 95% 信頼区間は

[3] $\leqq\mu\leqq$ [4] となる。

([3]，[4] は小数第3位を四捨五入して第2位までの近似値)

9．2次元確率変数 $(X,\ Y)$ の同時確率密度関数が $f(x,\ y)=\begin{cases} C(x-y) & (0\leqq y<x\leqq 1) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$ であるとき，次の各問いに答えよ。なお，C は定数である。(筑波大・改) (21点)

(1) C の値を求めよ。(以下，ここで求めた C の値を用いて答えよ)

（2） X の周辺確率密度関数 $f_1(x)$ を求めよ。

（3） Y の周辺確率密度関数 $f_2(y)$ を求めよ。

注意： （4）～（7）は答のみ。

（4） $E[X]$ の値を求めよ。　　（5） $E[Y]$ の値を求めよ。

（6） $V[X]$ の値を求めよ。　　（7） $V[Y]$ の値を求めよ。

10． X は離散型確率変数でポアソン分布 $P_o(\lambda)$ に従うとする。つまり λ は正の定数で $P(X=k)=\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ $(k=0,1,2,\cdots)$ である。このとき，次の各問いに答えよ。ただし，答のみ。

(4点)

（1） $\dfrac{\partial}{\partial\lambda}\left(\log\left(\dfrac{\lambda^X}{X!}e^{-\lambda}\right)\right)$ を求めよ。

（2） $E\left[\left\{\dfrac{\partial}{\partial\lambda}\left(\log\left(\dfrac{\lambda^X}{X!}e^{-\lambda}\right)\right)\right\}^2\right]$ を求めよ。