2016年度応用数学B (M4) 前期末試験問題

１．次の表は変量 x , y について得られたデータである。次の各問いに答えよ。
ただし，答のみ。(15点)

x_i	10	2	9	4	6	11	1	3	7	6
y_i	11	4	9	7	9	10	6	5	10	7

(1) [1] 平均 $\overline{x}$ を求めよ。　[2] 平均 $\overline{y}$ を求めよ。

(2) [1] 平均 $\overline{x^2}$ を求めよ。　[2] 平均 $\overline{y^2}$ を求めよ。　[3] 平均 $\overline{xy}$ を求めよ。

(3) [1] 標準偏差 s_x を求めよ。　[2] 標準偏差 s_y を求めよ。

注意：小数第４位を四捨五入して第３位までの近似値を答えよ。

(4) x と y の共分散 s_{xy} を求めよ。

(5) x と y の相関係数 r を求めよ。

注意：小数第４位を四捨五入して第３位までの近似値を答えよ。前の問題で求めた近似値を使う場合は解答した値を使うこと。特に s_x , s_y の値は (3) で解答した値を使うこと。以下，前に解答した近似値を使う場合は解答した値を使って計算すること。

(6) y の x への回帰直線の方程式を $y=a_1x+b_1$ とするとき，

[1] a_1 を求めよ。　[2] b_1 を求めよ。

(7) x の y への回帰直線の方程式を $x=a_2y+b_2$ とするとき，

[1] a_2 を求めよ。　[2] b_2 を求めよ。

注意：(6) , (7) は小数第４位を四捨五入して第３位までの近似値を答えよ。

２．ある学校の過去５年間のインフルエンザ接種率 x% と発病率 y% について調べたところ，次の結果を得た。

x	54.6	87.4	83.2	70.0	91.0
y	6.4	0.9	0.8	2.4	0.3

次の文章の (　) に入る最も適切な答えを解答用紙にかけ。なお，「近似値」と書いていないものは電卓で計算したものをそのまま答え，近似値は指定された小数点以下のそのさらに下を四捨五入したものを答えよ。例：小数第３位 ⇒ 小数第４位を四捨五入。
ただし，答のみ。(10点)

x と y の共分散の値は $s_{xy}=$ (１) , x の分散の値は $v_x=$ (２) となる。y の x への回帰直線の方程式は $y=$ (３) $x+$ (４) ((３) : 小数第３位，(４) : 小数第２位の近似値) となる。
接種率が 85% の場合，回帰直線を用いて発病率を推定すると (５) % (小数第２位の近似値) となる。

３．データ x : 1 , 1 , 2 , 3 , 3 , 4 , 4 , 4 , 7 , 9 に対して，次の各値を求めよ。ただし，答のみ。
(12点)

(1) 平均　(2) 中央値(メディアン)　(3) 範囲(レンジ)　(4) 最頻値(モード)
(5) 平均偏差　(6) 分散　(7) 標準偏差　(8) 四分位範囲　(9) 外れ値

4．次の文章の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙にかけ。ただし，答のみ。(13点)

注意：（　）は因数分解した n の式を答え，［　］は数値を答えよ。

n 個の２次元データ $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n)$ がある。各 x_i は１から n までのいずれかの値で同じ値はないとする。y_i も x_i と同じ条件を満たすとき，$\overline{x}=\overline{y}=$（ 1 ），$\overline{x^2}=\overline{y^2}=$（ 2 ）となる。従って $v_x=v_y=$（ 3 ）となる。また

$$s_{xy}=\overline{xy}-\overline{x}\cdot\overline{y}=\frac{1}{(\ 4\ )}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^2+y_i^2-(x_i-y_i)^2\right)-\left(\overline{x}\right)^2 \quad \left(\because \overline{x}=\overline{y}\right)$$

$$=(\ 5\ )-\frac{1}{(\ 4\ )}\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2 \quad \left(\because \sum_{i=1}^{n}x_i^2=\sum_{i=1}^{n}y_i^2\right)$$ となるから，$D=\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2$ と表せば

$$\frac{s_{xy}}{s_x s_y}=1-\frac{6D}{(\ 6\ )} \quad \left(\because s_x=s_y\right)$$ となる。例えば (x_i, y_i) が次の表であるとき

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	1	2	4	3	5	6	7	9	8	10

$D=$［ 7 ］，$\dfrac{s_{xy}}{s_x s_y}=$［ 8 ］となる。(［ 8 ］は小数第３位までの近似値)

5．次の各問いに答えよ。ただし，答のみ。(25点)

(1) X の確率分布が下の表で与えられているとき，次の各値を求めよ。

k	0	1	2
P_k	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	a

$\left(P_k=P(X=k)\right)$

[1] a　[2] $E[X]$　[3] $V[X]$　[4] $\sigma=\sqrt{V[X]}$

(2) 確率変数 X について，$E[X]=5$，$V[X]=2$，$Y=X-5$，$Z=\dfrac{X-5}{\sqrt{2}}$ と定めるとき，次の各値を求めよ。

[1] $E\left[X^2\right]$　[2] $V[Y]$　[3] $E[Z]$　[4] $E\left[Z^2\right]$

(3) 赤玉２個，白玉６個入っている袋から，１個ずつ 40 回復元抽出するとき，現われる赤玉の個数を X とするとき，次の各値を求めよ。

[1] $E[X]$　[2] $V[X]$　[3] σ　[4] $E\left[X^2\right]$

(4) ある人の携帯電話には１日平均３回のメールが届くという。１日のメールの回数を X とするとき，X は Poisson 分布 $P_o(\lambda)$ に従うことが知られている。このとき，次の各値を求めよ。

[1] λ　[2] $V[X]$　[3] $E\left[X^2\right]$　[4] $P\left(X\geqq 3\right)$

(5) X が区間 $(-2, 5)$ の一様分布に従うとき，次の各値を求めよ。

[1] $E[X]$　[2] $V[X]$　[3] $E\left[X^2\right]$

6．p, q, α は $0<p<1$，$p+q=1$，$\alpha>0$ を満たす定数とする。0 以上の整数 k に対して確率変数 X が $P_k=P(X=k)=\begin{pmatrix}-\alpha\\ k\end{pmatrix}p^{\alpha}(-q)^k$　$(k=0, 1, 2, \cdots)$ となるとき，次の各問いに

答えよ。なお記号 $\binom{-\alpha}{k}$ の意味は $\binom{-\alpha}{k}=\dfrac{-\alpha(-\alpha-1)(-\alpha-2)\cdots(-\alpha-k+1)}{k!}$

である。ただし，$\binom{-\alpha}{0}=1$ と約束する。(25点)（（2），(3) は解法を書くこと。）

（1） 次の論理の［　］に入る最も適切な答えを解答用紙にかけ。ただし，答のみ。

$$\binom{-\alpha}{k}p^{\alpha}(-q)^{k}=\frac{(-1)^{[\ 1\ ]}\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+[\ 2\ ])}{k!}p^{\alpha}(-q)^{k}$$

ここで $(-1)^{[\ 1\ ]}(-q)^{k}=(-1)^{[\ 3\ ]}q^{k}=q^{k}$ であるから p,q,α の仮定から

$P_k=\binom{-\alpha}{k}p^{\alpha}(-q)^{k}>0$ となる。一般の二項展開の式 $(1+x)^{\alpha}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^{k}\quad(|x|<1)$

を用いると $\sum_{k=0}^{\infty}P_k=p^{\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-\alpha}{k}(-q)^{k}=p^{\alpha}\{1-[\ 4\ ]\}^{[\ 5\ ]}=[\ 6\ ]$ となる。

（最後の［ 6 ］は数値，他は文字式）

（2） $E[X]$ を計算し p,q,α の簡単な式で表せ。

（3） $E[X(X-1)]=\dfrac{\alpha(\alpha+1)q^{2}}{p^{2}}$ となることを用いてよいので，これと上の（2）の結果を用いて $V[X]$ を p,q,α の簡単な式で表せ。

（4） (具体的な問題) 1つのサイコロを繰り返し振る反復試行を考える。このとき1の目が丁度5回出るまでに1以外の目が出た回数を X とする。このとき次の計算の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙にかけ。ただし，答のみ。

$X=k$ となるのは［ 1 ］回サイコロを振った時点で1の目が［ 2 ］回，1以外の目が k 回出て最後に1の目が出る事象であるから二項分布の確率を用いて

$$P(X=k)=\binom{[\ 1\ ]}{k}\left(\frac{1}{6}\right)^{[\ 3\ ]}\left(\frac{5}{6}\right)^{k}$$

$$=\frac{([\ 1\ ])([\ 1\ ]-1)\cdots[\ 3\ ]}{k!}\left(\frac{1}{6}\right)^{[\ 3\ ]}\left(\frac{5}{6}\right)^{k}$$

$$=\frac{(-[\ 3\ ])(-[\ 3\ ]-1)\cdots([\ 3\ ]-k+1)}{k!}(-1)^{[\ 4\ ]}\left(\frac{1}{6}\right)^{[\ 3\ ]}\left(\frac{5}{6}\right)^{k}$$

$$=\binom{[\ 5\ ]}{k}\left(\frac{1}{6}\right)^{[\ 3\ ]}\left(-\frac{5}{6}\right)^{k}$$

となる。つまり $p=\dfrac{1}{6}$，$q=\dfrac{5}{6}$，$\alpha=[\ 6\ ]$ に相当すると考えられるので $E[X]=[\ 7\ ]$，

$V[X]=[\ 8\ ]$ となる。

参考： 問題6の分布を負の二項分布といい，記号で $NB(\alpha,p)$ と表す。