2016年度前期中間試験問題・応用数学B（M4）

１．次の各問いに答えよ。ただし，$\boxed{\text{答のみ。}}$ (25点)

(1)　２個のさいころを同時に投げるとき，出る目の和が７となる確率を求めよ。

(2)　１０本のくじの中に当たりくじが３本ある。このくじを非復元抽出で３本引くとき，１本だけ当たる確率を求めよ。

(3)　1,2,3,4,5 の数字が１ずつ書かれている５枚のカードが入っている袋がある。この袋から１枚ずつ順に３枚のカードを取り出し，左から並べて３桁の整数を作ると２００以下の奇数ができる確率を求めよ。

(4)　３個のさいころを投げるとき，２個だけ同じ目が出る確率を求めよ。

(5) トランプ５２枚をよく切って２枚を同時に抜くとき，２枚とも偶数である事象を A，カードの数の和が７になる事象を B とする。ただし，J, Q, K はそれぞれ 11, 12, 13 とする。次の確率を求めよ。

[1]　$P(A)$　　[2]　$P(B)$　　[3]　$P(A\cup B)$

(6) トランプ５２枚をよく切って２枚を同時に抜くとき，次の確率を求めよ。

[1]　２枚ともハートである確率　　[2]　少なくとも１枚はハートでない確率

(7)　１から１０までの異なる数字が書いてあるカードが１０枚が入っている箱がある。この箱から１枚のカードを取り出すとき，数字が偶数である事象を A，３の倍数である事象を B とする。このとき次の確率を求めよ。

[1]　$P(A\cup B)$　　[2]　$P\left(\overline{A}\cup B\right)$　　[3]　$P\left(A\cup\overline{B}\right)$

(8)　３枚の硬貨を投げるとき，表が出る枚数の期待値を求めよ。

２．次の各問いに答えよ。ただし，$\boxed{\text{答のみ。}}$ (25点)

(1)　１枚の硬貨を３回続けて投げる。１回目に表が出る事象を A，２回目に表が出る事象を B，３回続けて表が出る事象を C とするとき，次の各問いに答えよ。

[1]　$P(A)$ を求めよ。　　[2]　$P(B)$ を求めよ。　　[3]　$P(C)$ を求めよ。

[4]　$P(A\cap B)$ を求めよ。　　[5]　$P(B\cap C)$ を求めよ。

[6]　A と B は互いに $\boxed{\text{独立}}$ か，$\boxed{\text{従属}}$ か答えよ。ただし，[1],[2],[4] すべて正解していない場合は点を与えない。

[7]　B と C は互いに $\boxed{\text{独立}}$ か，$\boxed{\text{従属}}$ か答えよ。ただし，[2],[3],[5] すべて正解していない場合は点を与えない。

(2) さいころを３回投げて同じ目が２回以上出たら勝ち残る，というゲームをするとき，次の各問いに答えよ。

[1] 勝ち残る確率を求めよ。

[2]　３人がこのゲームに参加し，２人が勝ち残る確率はいくらか。

(3) あるサッカーチーム J の勝率は４０％であるが，Q 選手がゴールを決めた試合は勝率が８０％に上がる。Q 選手が試合でゴールを決める確率を３０％として，次の各問いに答えよ。

[1] このチーム J が勝った試合で Q 選手がゴールを決めている確率を求めよ。

[2] このチーム J が負けた試合で Q 選手がゴールを決めている確率を求めよ。

(4) よく切ったトランプ52枚から1枚を抜くとき，その札がハートの奇数である事象を A，絵札またはエースである事象を B とする。このとき次の確率を求めよ。ただし，J，Q，K はそれぞれ 11，12，13 とする。

[1] $P_A(B)$　　[2] $P_B(A)$

(5) 大小2個のさいころを同時に投げる。大きいさいころの出る目が奇数である事象を A，出る目の和が8である事象を B とするとき，次の確率を求めよ。

[1] $P(B)$　　[2] $P_B(A)$　　[3] $P(A \cap B)$

(6) ある試行により起る事象 A, B, C について，$P(A)=\dfrac{1}{2}$，$P_A(B)=\dfrac{3}{5}$，$P_{A\cap B}(C)=\dfrac{4}{5}$ であるとき，$P\left(A \cap B \cap \overline{C}\right)$ を求めよ。

3．3つの事象 A, B, C において $P_C(A \cup B)=P_C(A)+P_C(B)-P_C(A \cap B)$ が成り立つことを証明せよ。ただし，$P(C)>0$ とする。(5点)

4．$P(A)=\dfrac{15}{37}$，$P(B)=\dfrac{12}{37}$，$P(C)=\dfrac{10}{37}$，$P_A(D)=\dfrac{20}{1000}$，$P_B(D)=\dfrac{15}{1000}$，$P_C(D)=\dfrac{10}{1000}$ であるとき，次の確率を求めよ。なお，A, B, C は互いに排反で，$A \cup B \cup C=\Omega$ (全事象) とする。ただし，$\boxed{\text{答のみ。}}$ (5点)

(1) $P(D)$　　(2) $P_D(A)$　　(3) $P_D(B)$　　(4) $P_D(C)$

5．ある試行 T を1回行うとき，事象 A が起る確率を p $(0<p<1)$ とする。この試行を同じ条件で n 回行うとき，事象 A が起る回数の期待値を n, p の簡単な式で表せ。(10点)

6．A, B はゲームにより，勝者が敗者に1円を払うこととする。ただし，A, B の勝つ確率はそれぞれ $\alpha, 1-\alpha$ である。最初 A, B はそれぞれ n 円，$N-n$ 円持っていて，どちらかが破産する（所持金0円）か，目標額を達成する（所持金 N 円）まで続けるとき，A が破産する確率を求める次の計算の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙にかけ。なお，$0<\alpha<1$，$\alpha \neq \dfrac{1}{2}$ とする。

ただし，$\boxed{\text{答のみ。}}$ (14点)

（注意：(　) は文字または文字式，[　] は数値が入る）

A の所持金が k 円であるとき A が破産する確率を p_k と表せば，漸化式

$p_k=(\ 1\ )p_{k+1}+((\ 2\ ))p_{k-1}$ が成り立つ。$\beta=\dfrac{(\ 2\ )}{(\ 1\ )}$ と表せば，$p_{k+1}-p_k=\beta((\ 3\ ))$ となる。$\therefore\ p_{k+1}-p_k=(\ 4\ )(p_1-p_0)$ … ①，これと等比数列の和の公式を用いれば α の仮定から $0<\beta$，$\beta \neq [\ 5\ ]$ であるから $p_n=p_0+(p_1-p_0)(\ 6\ )$ … ② となる。明らかに $p_0=[\ 7\ ]$，$p_N=[\ 8\ ]$ だから②を $n=N$ の場合に適用すると $p_1-p_0=(\ 9\ )$ となるので，これを②に代入して $p_n=1-(\ 10\ )=\dfrac{(\ 12\ )}{1-(\ 11\ )}$ となる。

7．n 枚の硬貨を同時に投げる場合を考える。ただし，どの硬貨も表，裏が出る確率は等しく $\dfrac{1}{2}$ とする。$n \geqq 3$ として，次の各問いに答えよ。ただし，$\boxed{\text{（4）以外は答のみ。}}$ (16点)

（1） 表がちょうど 2 枚だけ出る確率を求めよ。

（2） これらの硬貨を同時に投げることを繰り返し，表がちょうど 2 枚だけ出た時点で終了する。ちょうど k 回で終了する確率を求めよ。

（3） （2）において，k 回以内に終了する確率を求めよ。

（4） （2）において，終了するまでにかかる回数の期待値を求めよ。

（5） $n = 5$ のとき

［1］ （1）の確率を求めよ。　［2］ （2）の確率を求めよ。

［3］ （3）の確率を求めよ。　［4］ （4）の期待値を求めよ。

(東京大 改)