F分布とカイ2乗分布

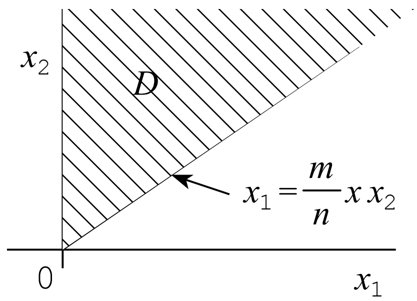
> 確率変数 X_1, X_2 は互いに独立で、それぞれ自由度 m, n のカイ２乗分布に従うならば
>
> $X=\dfrac{\dfrac{X_1}{m}}{\dfrac{X_2}{n}}$ は自由度（m, n）のF 分布に従う。

これは教科書８６ページ書かれていることである。このことを２つの方法で証明する。

○ 分布関数を計算して証明する方法

X_1, X_2 の確率密度関数はそれぞれ、$\dfrac{x_1^{\frac{m}{2}-1}e^{-\frac{x_1}{2}}}{2^{\frac{m}{2}}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}$，$\dfrac{x_2^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x_2}{2}}}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$ （いずれも$x_i>0$）であり、互いに独立であるから上のX の確率密度関数は $\dfrac{x_1^{\frac{m}{2}-1}x_2^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x_1}{2}}e^{-\frac{x_2}{2}}}{2^{\frac{m}{2}}2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$ である。従って

$$P\left(X\leqq x\right)=\iint_D \frac{x_1^{\frac{m}{2}-1}x_2^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x_1}{2}}e^{-\frac{x_2}{2}}}{2^{\frac{m}{2}}2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}dx_1dx_2\ ,\ D:\ 0\leqq x_1\leqq\frac{m}{n}xx_2,\ 0\leqq x_2<\infty$$



$\alpha=\dfrac{m}{n}$ と表せば、上式は次の累次積分になる。

$$\int_0^\infty\int_0^{\alpha xx_2}\frac{x_1^{\frac{m}{2}-1}x_2^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x_1}{2}}e^{-\frac{x_2}{2}}}{2^{\frac{m}{2}}2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}dx_1dx_2$$

これをx で微分すると（分布関数の導関数が確率密度関数）

$$\int_0^\infty\alpha x_2\frac{\left(\alpha xx_2\right)^{\frac{m}{2}-1}x_2^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{\alpha xx_2}{2}}e^{-\frac{x_2}{2}}}{2^{\frac{m}{2}}2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}dx_2$$

$$=\alpha^{\frac{m}{2}}x^{\frac{m}{2}-1}\frac{1}{2^{\frac{1}{2}(m+n)}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^\infty x_2^{\frac{1}{2}(m+n)-1}e^{-\frac{1}{2}(\alpha x+1)x_2}dx_2$$

$\dfrac{1}{2}(\alpha x+1)x_2=u$ と置換する。

$$
与式=\frac{\alpha^{\frac{m}{2}}x^{\frac{m}{2}-1}}{2^{\frac{1}{2}(m+n)}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^{\infty}\frac{2^{\frac{1}{2}(m+n)-1}u^{\frac{1}{2}(m+n)-1}}{(\alpha x+1)^{\frac{1}{2}(m+n)-1}}e^{-u}\frac{2}{\alpha x+1}du
$$

$$
=\frac{\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\frac{x^{\frac{m}{2}-1}}{\left(\frac{m}{n}x+1\right)^{\frac{1}{2}(m+n)}}\underbrace{\boxed{\int_0^{\infty}u^{\frac{1}{2}(m+n)-1}e^{-u}du}}_{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}
$$

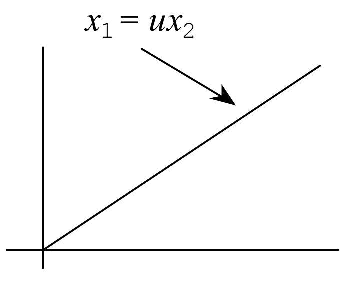
$$
=\frac{\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}}}{B\left(\frac{m}{2},\frac{n}{2}\right)}\frac{x^{\frac{m}{2}-1}}{\left(\frac{m}{n}x+1\right)^{\frac{1}{2}(m+n)}}\quad\because B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}
$$

$$
=\frac{m^{\frac{m}{2}}n^{\frac{n}{2}}}{B\left(\frac{m}{2},\frac{n}{2}\right)}\frac{x^{\frac{m}{2}-1}}{(mx+n)^{\frac{1}{2}(m+n)}}
$$

これは自由度 (m,n) の F 分布の確率密度関数である。よって証明された。

○ 積率母関数を計算して証明する方法

$X=\dfrac{\frac{X_1}{m}}{\frac{X_2}{n}}$ の積率母関数を計算し、それが自由度 (m,n) の F 分布の積率母関数に等しいことを示す。



$$
E\left[e^{tX}\right]=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{x_1^{\frac{m}{2}-1}x_2^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x_1}{2}}e^{-\frac{x_2}{2}}}{2^{\frac{m}{2}}2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}e^{\frac{n x_2}{m x_2}t}dx_1dx_2
$$

変数変換 $\begin{cases}x_1=uv\\x_2=v\end{cases}$ を行えば、$J=\begin{vmatrix}v & u\\0 & 1\end{vmatrix}=v$

$$
与式=\frac{1}{2^{\frac{1}{2}(m+n)}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}(uv)^{\frac{m}{2}-1}v^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{1}{2}uv}e^{-\frac{v}{2}}e^{\frac{n}{m}ut}v\,dvdu
$$

$$
=\frac{1}{2^{\frac{1}{2}(m+n)}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^{\infty}u^{\frac{m}{2}-1}e^{\frac{n}{m}ut}\left(\int_0^{\infty}v^{\frac{1}{2}(m+n)-1}e^{-\frac{1}{2}(u+1)v}dv\right)du\ \cdots\ ①
$$

（　）の中の積分で、$\frac{1}{2}(u+1)v=w$ と置換すれば

$$\int_0^\infty v^{\frac{1}{2}(m+n)-1} e^{-\frac{1}{2}(u+1)v} dv = \int_0^\infty \left(\frac{2}{u+1}\right)^{\frac{1}{2}(m+n)-1} w^{\frac{1}{2}(m+n)-1} e^{-w} \frac{2}{u+1} dw$$

$$= \frac{2^{\frac{1}{2}(m+n)} \Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{(u+1)^{\frac{1}{2}(m+n)}}$$

従って、①式は、$\dfrac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \displaystyle\int_0^\infty \frac{u^{\frac{m}{2}-1}}{(u+1)^{\frac{1}{2}(m+n)}} e^{\frac{n}{m}ut} du$ となる。$\dfrac{n}{m}u=x$ と置換して

$$与式 = \frac{1}{B\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right)} \int_0^\infty \frac{\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}-1} x^{\frac{m}{2}-1}}{\left(\frac{m}{n}x+1\right)^{\frac{1}{2}(m+n)}} e^{tx} \frac{m}{n} dx$$

$$= \frac{m^{\frac{m}{2}} n^{\frac{n}{2}}}{B\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right)} \int_0^\infty \frac{x^{\frac{m}{2}-1}}{(mx+n)^{\frac{1}{2}(m+n)}} e^{tx} dx$$

これは自由度 (m, n) の F 分布の積率母関数を計算する式と一致するから、X はそれに従う。この証明のうまいところは、上式を最後まで計算しないところにある。

○ 参考までに F 分布の平均と分散を計算する。

$$E[X] = \frac{m^{\frac{m}{2}} n^{\frac{n}{2}}}{B\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right)} \int_0^\infty \frac{x^{\frac{m}{2}-1} x}{(mx+n)^{\frac{1}{2}(m+n)}} dx$$

$$= \frac{m^{\frac{m}{2}} n^{\frac{n}{2}}}{B\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right)} \int_0^\infty \frac{x^{\frac{m}{2}}}{n^{\frac{1}{2}(m+n)}\left(1+\frac{m}{n}x\right)^{\frac{1}{2}(m+n)}} dx, \quad \frac{m}{n}x = \tan^2\theta \text{ と置換する。}$$

$$= \frac{\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}}}{B\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right)} \int_0^\infty \frac{\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{m}{2}} \tan^m\theta}{\left(1+\tan^2\theta\right)^{\frac{1}{2}(m+n)}} \frac{2n}{m} \tan\theta \sec^2\theta \, d\theta$$

$$=\frac{\frac{n}{m}}{B\left(\frac{m}{2},\frac{n}{2}\right)}2\int_0^{\frac{\pi}{2}}sin^{m+1}\theta\, cos^{n-3}\theta\, d\theta$$

$$=\frac{\frac{n}{m}}{B\left(\frac{m}{2},\frac{n}{2}\right)}2\int_0^{\frac{\pi}{2}}sin^{2\left(\frac{m}{2}+1\right)-1}\theta\, cos^{2\left(\frac{n}{2}-1\right)-1}\theta\, d\theta$$

一般に、$B(p,q)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}sin^{2p-1}\theta\, cos^{2q-1}\theta\, d\theta$ が成り立つので（証明してごらん）

与式$=\dfrac{\frac{n}{m}B\left(\frac{m}{2}+1,\frac{n}{2}-1\right)}{B\left(\frac{m}{2},\frac{n}{2}\right)}$

これも一般に、$B(p+1,q-1)=\dfrac{p}{q-1}B(p,q)$　$(q>1)$ が成り立つので

$$\frac{\frac{n}{m}B\left(\frac{m}{2}+1,\frac{n}{2}-1\right)}{B\left(\frac{m}{2},\frac{n}{2}\right)}=\frac{n}{m}\frac{\frac{m}{2}}{\frac{n}{2}-1}\frac{B\left(\frac{m}{2},\frac{n}{2}\right)}{B\left(\frac{m}{2},\frac{n}{2}\right)}=\frac{n}{n-2}$$

$\therefore E[X]=\dfrac{n}{n-2}$　$(n\geqq 3)$ … ②

同様にして（詳細は各自で確認せよ）

$$E\left[X^2\right]=\frac{\left(\frac{n}{m}\right)^2}{B\left(\frac{m}{2},\frac{n}{2}\right)}2\int_0^{\frac{\pi}{2}}sin^{2\left(\frac{m}{2}+2\right)-1}\theta\, cos^{2\left(\frac{n}{2}-2\right)-1}\theta\, d\theta$$

$$=\left(\frac{n}{m}\right)^2\frac{B\left(\frac{m}{2}+2,\frac{n}{2}-2\right)}{B\left(\frac{m}{2},\frac{n}{2}\right)}=\left(\frac{n}{m}\right)^2\frac{\left(\frac{m}{2}+1\right)\frac{m}{2}}{\left(\frac{n}{2}-2\right)\left(\frac{n}{2}-1\right)}\frac{B\left(\frac{m}{2},\frac{n}{2}\right)}{B\left(\frac{m}{2},\frac{n}{2}\right)}$$

$$\left(\because B\left(\frac{m}{2}+2,\frac{n}{2}-2\right)=\frac{\frac{m}{2}+1}{\frac{n}{2}-2}B\left(\frac{m}{2}+1,\frac{n}{2}-1\right)\right)$$

$=\dfrac{(m+2)n^2}{m(n-4)(n-2)}$　従って③を用いて

$$V[X]=E\left[X^2\right]-(E[X])^2=\frac{(m+2)n^2}{m(n-4)(n-2)}-\frac{n^2}{(n-2)^2}=\frac{2n^2(m+n-2)}{m(n-4)(n-2)^2}\quad(n\geqq 5)$$

ちなみに、$E\left[X^k\right]=\dfrac{n^k\prod_{l=1}^{k}\{m+2(l-1)\}}{m^k\prod_{l=1}^{k}(n-2l)}$ $\left(n \geqq 2k+1\right)$

［証明］ $E\left[X^k\right]=\dfrac{m^{\frac{m}{2}}n^{\frac{n}{2}}}{B\left(\frac{m}{2},\frac{n}{2}\right)}\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{x^{\frac{m}{2}+k-1}}{(mx+n)^{\frac{1}{2}(m+n)}}dx$

$$=\frac{m^{\frac{m}{2}}n^{\frac{n}{2}}}{B\left(\frac{m}{2},\frac{n}{2}\right)}\int_0^{\infty}\frac{x^{\frac{m}{2}+k-1}}{n^{\frac{1}{2}(m+n)}\left(1+\frac{m}{n}x\right)^{\frac{1}{2}(m+n)}}dx \rightarrow x=\frac{n}{m}tan^2\theta \left(0 \leqq \theta < \frac{\pi}{2}\right)$$

$$=\frac{\left(\frac{n}{m}\right)^k}{B\left(\frac{m}{2},\frac{n}{2}\right)}2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{tan^{m+2k-1}\theta}{sec^{m+n-2}\theta}d\theta$$

$$=\frac{\left(\frac{n}{m}\right)^k}{B\left(\frac{m}{2},\frac{n}{2}\right)}2\int_0^{\frac{\pi}{2}}sin^{2\left(\frac{m}{2}+k\right)-1}\theta\, cos^{2\left(\frac{n}{2}-k\right)-1}d\theta=\left(\frac{n}{m}\right)^k\frac{B\left(\frac{m}{2}+k,\frac{n}{2}-k\right)}{B\left(\frac{m}{2},\frac{n}{2}\right)}$$

ここで、

$$B\left(\frac{m}{2}+k,\frac{n}{2}-k\right)=\frac{\frac{m}{2}+k-1}{\frac{n}{2}-k}B\left(\frac{m}{2}+k-1,\frac{n}{2}-k+1\right)$$

$$=\frac{\left(\frac{m}{2}+k-1\right)\left(\frac{m}{2}+k-2\right)}{\left(\frac{n}{2}-k\right)\left(\frac{n}{2}-k+1\right)}B\left(\frac{m}{2}+k-2,\frac{n}{2}-k+2\right)$$

$$=\cdots=\frac{\left(\frac{m}{2}+k-1\right)\left(\frac{m}{2}+k-2\right)\cdots\left(\frac{m}{2}+1\right)\frac{m}{2}}{\left(\frac{n}{2}-k\right)\left(\frac{n}{2}-k+1\right)\cdots\left(\frac{n}{2}-2\right)\left(\frac{n}{2}-1\right)}B\left(\frac{m}{2},\frac{n}{2}\right)$$

$$\therefore \left(\frac{n}{m}\right)^k\frac{B\left(\frac{m}{2}+k,\frac{n}{2}-k\right)}{B\left(\frac{m}{2},\frac{n}{2}\right)}=\left(\frac{n}{m}\right)^k\frac{\left(\frac{m}{2}+k-1\right)\left(\frac{m}{2}+k-2\right)\cdots\left(\frac{m}{2}+1\right)\frac{m}{2}}{\left(\frac{n}{2}-k\right)\left(\frac{n}{2}-k+1\right)\cdots\left(\frac{n}{2}-2\right)\left(\frac{n}{2}-1\right)}$$

$$=\frac{n^k(m+2(k-1))(m+2(k-2))\cdots(m+2)m}{m^k(n-2k)(n-2(k-1))\cdots(n-4)(n-2)}=\frac{n^k\prod_{l=1}^{k}\{m+2(l-1)\}}{m^k\prod_{l=1}^{k}(n-2l)} \quad \left(n \geqq 2k+1\right)$$

（証終）