2017年度学年末試験問題・応用数学A(ES4)

注意： 答のみの問題で，問題番号を囲む括弧は数式上必要な括弧を兼ねていない。例えば
$x^2+2x-3=$（ 1 ）$(x-1)$ となっていたら（ 1 ）の正解は $(x+3)$ であり，((1))$(x-1)$
となっていたら正解は $x+3$ である。また，不必要な括弧をつけた解答も減点もしくは０点とする。
注意： 項が無限個ある級数は，$\sum$ の記号を用いて答えよ。

１．次の各問いに答えよ。ただし，答のみ。(25点)

（1） 関数 $f(z)=\dfrac{z\exp(-z)}{(z-i)^2}$ に関する次の記述の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙に書け。なお，[2],[3],[5],[6],[9],[10]は実数である。

(ここから) $f(z)$ の孤立特異点は $z=$[1] で $\displaystyle\lim_{z\to[\ 1\ ]}(z-[\ 1\ ])^2 f(z)=[\ 2\ ]+i\,[\ 3\ ]$ だから
[4] 位の極となる。∴ $\mathrm{Res}\,[f,[\ 1\ ]]=[\ 5\ ]-i([\ 6\ ])$ となる。$C:|z-3|=R$ とすれば

$$0<R<[\ 7\ ]\Rightarrow\int_C f(z)\,dz=0,$$

$$R>[\ 7\ ]\Rightarrow\int_C f(z)\,dz=[\ 8\ ]\exp(-i)=[\ 9\ ]+i\,[\ 10\ ]$$ (ここまで)

（2） 次の次の記述の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙に書け。

(ここから) $R>0$ とし，$z=R\exp(it)$ $(t\in\mathbb{R})$ とするとき，$|\exp(iz)|=\exp([\ 1\ ])$
だから $[\ 2\ ]\leqq|\exp(iz)|\leqq[\ 3\ ]$ (ここまで)

（3） 関数 $f(z)=\dfrac{z+1}{z^2+1}$ に関する次の記述の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙に書け。

(ここから) $C_R:|z-1-i|=R$ $(R>0)$ とする。$\mathrm{Res}\,[f,i]=[\ 1\ ]$, $\mathrm{Res}\,[f,-i]=[\ 2\ ]$

$$\therefore\ 0<R<1\Rightarrow\int_{C_R}f(z)\,dz=0,\ 1<R<[\ 3\ ]\Rightarrow\int_{C_R}f(z)\,dz=[\ 4\ ],$$

$$[\ 3\ ]<R\Rightarrow\int_{C_R}f(z)\,dz=2\pi i$$ となる。(ここまで)

（4） 関数 $f(z)=\dfrac{\exp(i2z)}{z^2+1}$，半円 $C_R:z=Re^{it}$ $(0\leqq t\leqq\pi)$ および線分
$\Gamma_R:z=t$ $(-R\leqq t\leqq R)$ に関する次の記述の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙に書け。
なお，$R>1$ とする。

(ここから) $\mathrm{Res}\,[f,i]=[\ 1\ ]$, $\mathrm{Res}\,[f,-i]=[\ 2\ ]$ であるから $\displaystyle\int_{C_R+\Gamma_R}f(z)\,dz=[\ 3\ ]$

C_R 上で $|\exp(i2z)|=e^{[\ 4\ ]}\leqq 1$, $\left|\dfrac{1}{z^2+1}\right|\leqq\dfrac{1}{[\ 5\ ]-1}$ だから $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}f(z)\,dz=0$

また $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_R}f(z)\,dz=\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{e^{i2t}}{t^2+1}\,dt$ だから $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{[\ 6\ ]}{x^2+1}\,dx=[\ 3\ ]$ (ここまで)

2．次の積分の値を求めよ。ただし，答のみ。(9点)

（1） $\displaystyle\int_C \bar{z}\,dz$, C : $z=\exp(it)$ $\left(0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$

（2） $\displaystyle\int_C \left(z^2-iz+2\right)dz$, C : $z=t+i\dfrac{t^2}{4}$ $\left(0 \leqq t \leqq 2\right)$

（3） $\displaystyle\int_C \frac{\exp(-iz)}{z^2+1}\,dz$, C : $|z|=2$ （4） $\displaystyle\int_C \frac{\exp z}{z+1}\,dz$, C : $|z+1|=1$

（5） $\displaystyle\int_C \frac{2z+1}{z(z-4)}\,dz$, C : $|z-3|=2$

3．次の記述の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙に書け。なお，[ ] は数値が入る。ただし，答のみ。(4点)

(ここから) $I=\displaystyle\int_C \bar{z}\,dz$, C : $z=1-t+it$ $\left(0 \leqq t \leqq 1\right)$ を求める。C 上で $\bar{z}=$ (1) だから

$I=$ ([2]) $\displaystyle\int_0^1$ ((1)) $dt=$ ([2])[3] $=$ [4] (ここまで)

4．関数 $f(z)=\dfrac{1}{z^2+5z+6}$ について，次の問いに答えよ。ただし，答のみ。(12点)

（1） $f(z)$ の孤立特異点を求めよ。

上で求めた特異点を α , β $\left(\text{ただし，} |\alpha|<|\beta|\right)$ とする。

（2） $f(z)$ の α を中心とする環状領域 $0<|z-\alpha|<1$ における Laurent 級数を求めよ。

（3） $f(z)$ の α を中心とする環状領域 $1<|z-\alpha|$ における Laurent 級数を求めよ。

（4） $f(z)$ の β を中心とする環状領域 $0<|z-\beta|<1$ における Laurent 級数を求めよ。

（5） $f(z)$ の β を中心とする環状領域 $1<|z-\beta|$ における Laurent 級数を求めよ。

（6） $\mathrm{Res}[f,\alpha]$ を求めよ。 （7） $\mathrm{Res}[f,\beta]$ を求めよ。

（8） $\displaystyle\int_C f(z)\,dz$, C : $|z|=4$ を求めよ。

5． 3個の関数 $f(z)=z\cos\dfrac{1}{z}$, $g(z)=\dfrac{\sin z}{z^3}$, $h(z)=\dfrac{1-\cos z}{z^2}$ はいずれも $z=0$ を孤立特異点にもつ。次の問いに答えよ。ただし，答のみ。(8点)

（1） 0 は次の関数の何という特異点か答えよ。なお，極の場合は何位であるかも答え，除去可能の場合は複素数平面全域で正則にするには $z=0$ の値をいくつにすればよいかも答えよ。

[1] $f(z)$ [2] $g(z)$ [3] $h(z)$

（2） C : $|z|=1$ のとき，次の積分の値を求めよ。

[1] $\displaystyle\int_C f(z)\,dz$ [2] $\displaystyle\int_C g(z)\,dz$

6．次の関数を（　）内の点を中心とするTaylor展開で表せ。また，その収束半径 R も求めよ。ただし，（1），（2），（3）は答のみ。(10点)

（1）$\dfrac{1}{1-z^3}$　$(z=0)$　（2）$\dfrac{1}{1-2z}$　$(z=0)$　（3）$\dfrac{1}{(1-2z)^2}$　$(z=0)$

（4）$\dfrac{1}{1-z}$　$(z=2i)$

7．次の記述の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙に書け。ただし，答のみ。(7点)

(ここから) α は関数 $f(z)$ の孤立特異点で α を中心とする $0<|z-\alpha|<R$ におけるLaurent展開を $f(z)=\sum_{m=1}^{\infty}\dfrac{a_{-m}}{(z-\alpha)^m}+F(z)$ （$F(z)$：正則部）とする。もし α が１位の極ならば $f(z)=(\ 1\ )+F(z)$ だから $(z-\alpha)^2 f(z)=(\ 2\ )+(z-\alpha)^2F(z)$ となる。$\dfrac{d}{dz}\left\{(z-\alpha)^2F(z)\right\}=(\ 3\ )$ となるから $\lim_{z\to\alpha}\dfrac{d}{dz}\left\{(z-\alpha)^2f(z)\right\}=(\ 4\ )$，一方 $\lim_{z\to\alpha}(z-\alpha)f(z)=(\ 5\ )$ (ここまで)

8．実積分 $I=\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{1}{2+\cos\theta}\,d\theta$ を，複素積分を用いて求める次の記述の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙に書け。なお，[　] には数値が入る。ただし，答のみ。(9点)

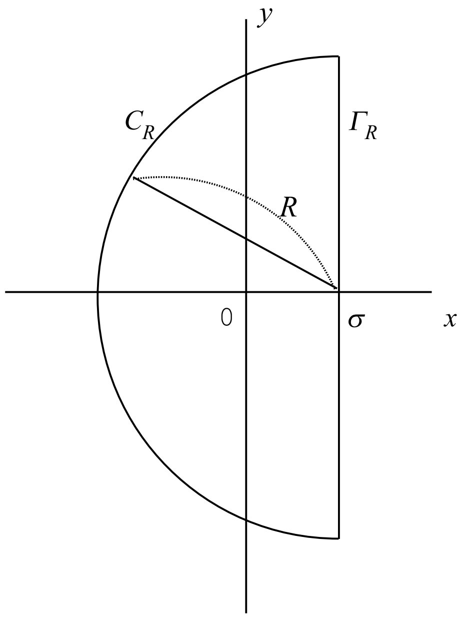
(ここから) $C: z=\exp(i\theta)$ $(0\leqq\theta\leqq 2\pi)$ とすれば C 上の点 z で表すと $\cos\theta=(\ 1\ )$ だから $\dfrac{1}{2+\cos\theta}=\dfrac{2z}{(\ 2\ )}$ となる。∴ $I=\dfrac{2}{i}\displaystyle\int_C(\ 3\ )\,dz$ … ①，$f(z)=(\ 3\ )$ と表せば $f(z)$ の孤立特異点は $z=[\ 4\ ]$ で，このうち (C) に属するのは $z=[\ 5\ ]$ で，１位の極である。従って $\mathrm{Res}[f,[\ 5\ ]]=[\ 6\ ]$ であるから，留数定理より $I=[\ 7\ ]$ と求まる。(ここまで)

9．関数 $f(z)=\dfrac{z}{z^2+a^2}$　（$a>0$：定数），線分 $\Gamma_R: z=\sigma+i\zeta$ $(-R\leqq\zeta\leqq R)$，曲線 $C_R: z=\sigma+R\exp(i\theta)$ $\left(\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\dfrac{3\pi}{2}\right)$ について，次の問いに答えよ。なお，σ は正の定数で，$R>\sqrt{\sigma^2+a^2}$ とする。(16点)

（1）t を正の実数とするとき，R が十分大きければ

$$\left|\int_{C_R}\exp(tz)f(z)\,dz\right|\leqq\frac{2\pi e^{\sigma t}}{t(R-\sigma)}\left(1-e^{-Rt}\right)$$ が成り立つことを証明せよ。

（2）$\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_R}\exp(tz)f(z)\,dz$ を求めよ。なお，t は（1）と同じ条件を満たすものとする。


y
C_R
Γ_R
R
0
σ
x