2017年度後期中間試験問題・応用数学A（ES4）

注意： 答のみの問題で，問題番号を囲む括弧は数式上必要な括弧を兼ねていない。例えば
$x^2+2x-3=(\ 1\ )(x-1)$ となっていたら（ 1 ）の正解は $(x+3)$ であり，$((\ 1\ ))(x-1)$ となっていたら正解は $x+3$ である。また，不必要な括弧をつけた解答も減点もしくは 0 点とする。

１．次の各問いに答えよ。ただし，答のみ。(25点)

（1） 次の値を求めよ。（ $a+bi$，$a\in\mathrm{R}$，$b\in\mathrm{R}$ の形で答えよ）

［1］ $\sqrt{1+\sqrt{3}\,i}$　［2］ $\sqrt{-i}$　［3］ $\log(1-i)$　［4］ $\mathrm{Log}\left(\sqrt{3}-i\right)$

（2） $z=\dfrac{1}{i}+\dfrac{1}{1+i}$ のとき，つぎのものを求めよ。

［1］ $\mathrm{Re}(z)$　［2］ $\mathrm{Im}(z)$　［3］ $|z|$　［4］ $\overline{z}$

（3） 次の複素数を極形式で表せ。ただし，$0\leqq\arg z<2\pi$ とせよ。

［1］ $\dfrac{1}{4}(1+i)^4$　［2］ $\sqrt{3}-i$

（4） 次の関数を微分せよ。

［1］ $w=\left(z^2-iz-1\right)^6$　［2］ $w=\dfrac{1}{(i-z)^2}$　［3］ $w=\dfrac{z}{z-i}$

（5） 次の極限値を求めよ。（ $a+bi$，$a\in\mathrm{R}$，$b\in\mathrm{R}$ の形で答えよ）

［1］ $\displaystyle\lim_{z\to 1+i}\left(z+\overline{z}\right)^2$　［2］ $\displaystyle\lim_{z\to 2+i}\frac{z^2}{z-2}$　［3］ $\displaystyle\lim_{z\to -i}\frac{z^2+1}{2z^2+iz+1}$

（6） 方程式 $z^6=-1$ の解のうち，$\mathrm{Im}\,z<0$ となるものを答えよ。

２．次の計算の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙に書け。ただし，答のみ。(8点)

(ここから) $\cosh\dfrac{i\pi}{3}$ の値は（ 1 ），$\sinh\dfrac{i\pi}{3}$ の値は（ 2 ）である。

$\log(1+i)=(\ 3\ )+i\,((\ 4\ ))$ $(k\in\mathrm{Z})$ だから

$(1+i)^i=\exp\left(i\log(1+i)\right)=\exp((\ 5\ )+i\,(\ 6\ ))=e^{(\ 5\ )}((\ 7\ )+i\,(\ 8\ ))$ (ここまで)

３．関数 $w=\tan z$ の逆関数 $w=\tan^{-1}z$ について，次の問いに答えよ。
ただし，（2）は答のみ。(8点)

（1） $\tan^{-1}z$ を対数関数を用いて表せ。また，$\tan^{-1}z$ の定義域も求めよ。

（2） $\tan^{-1}(2i)$ の値を求めよ。（ $a+bi$，$a\in\mathrm{R}$，$b\in\mathrm{R}$ の形で答えよ）

４．$z=x+yi$ $(x\in\mathrm{R},\ y\in\mathrm{R})$ のとき，次の関数は正則か。もし正則ならば導関数を求めよ。(9点)

（1） $f(z)=-y+xi$　（2） $g(z)=x\left(x^2-3y^2\right)+y\left(3x^2-y^2\right)i$

5．複素数平面上で３点 $0, 1+i, z$ が正三角形を作るように z を求める。次の計算の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙に書け。ただし，答のみ。(14点)

(ここから) $1+i$ を極形式で表せば $1+i=(\ 1\ )\left(\cos(\ 2\ )+i\sin(\ 2\ )\right)$ $\left(0\leqq(\ 2\ )<2\pi\right)$

$\therefore\ 1+i=(\ 1\ )\exp((\ 3\ ))$，従って条件を満たす点 z は $z=(\ 4\ )\exp((\ 3\ )\pm(\ 5\ ))$

即ち，$z=(\ 4\ )\left(\cos((\ 6\ ))+i\sin((\ 6\ ))\right)=(\ 7\ )$，

$z=(\ 4\ )\left(\cos(\ 8\ )+i\sin(\ 8\ )\right)=(\ 9\ )$ $\left(-\pi<(\ 6\ )<(\ 8\ )\leqq\pi\right)$ (ここまで)

注意：（７），（９）は三角関数の値を求めて $a+bi$, $a\in\mathrm{R}$, $b\in\mathrm{R}$ の形で答えよ。

6．$z=\exp(i\theta)$ と置くとき，次の式を z で表せ。ただし，答のみ。(3点)

（1） $\sin\theta$ （2） $\cos\theta$ （3） $\dfrac{2\sin\theta}{1-2\cos\theta}$

7．関数 $f(z)=\dfrac{3z+i}{z^2+1}$ と，原点を中心とする半径２の円 C に関して，次の問いに答えよ。ただし，答のみ。(4点)

（1） $f(z)=\dfrac{a}{z-i}+\dfrac{b}{z+i}$ を満たす定数 a, b を求めよ。 [1] a [2] b

（2） $\displaystyle\int_C f(z)\,dz$ の値を求めよ。

8．次の積分の値を求めよ。ただし，答のみ。(4点)

（1） $\displaystyle\int_C z^3 dz,\ C: z=i+e^{it}\ \left(-\frac{\pi}{2}\leqq t\leqq\frac{\pi}{2}\right)$

（2） $\displaystyle\int_C \cos z\,dz,\ C: z=\pi\cos t+i\sin t\ \left(0\leqq t\leqq\frac{\pi}{2}\right)$

9．関数 $w=\dfrac{1}{\bar{z}}$ に関して，次の問いに答えよ。ただし，答のみ。(11点)

（1） $z=9-2i$ に対応する点 w を求め，$a+bi$, $a\in\mathrm{R}$, $b\in\mathrm{R}$ の形で答えよ。

（2） $z=x+iy$, $w=u+iv$ とおくとき，x, y を u, v で表せ。 [1] x [2] y

（3） 円 $|z-3i|=2$ はどのような図形に移るかを計算した次の文章の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙に書け。

(ここから) $z=x+iy$, $w=u+iv$ とおく。$|z-3i|=2$ から $|z-3i|^2=4$ だから，これを絶対値記号を用いないで x, y の式で表すと [1]$=4$ … ① となる。問題（2）で求めた関係式を用いて x^2+y^2 を u, v で表せば $x^2+y^2=$[2] となるから，①を整理して u, v で表せば

[3]$\left(u^2+v^2\right)-$[4]$v+1=0$ となる。これを変形して $u^2+(v-$[5]$)^2=$[6] となる。

これは中心が点 [7]，半径 [8] の円になる。(ここまで)

注意：[3] から [8] は数値である。

10．複素平面上の直線 $ax+by+c=0$ $(z=x+yi\,;\ a, b, c\in \mathrm{R})$ を z で表す変形を書いた次の計算の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙に書け。なお，[　　] は数値，(　　) は文字式が入る。ただし，答のみ。(7点)

(ここから) $x=[\ 1\ ]\left(z+\bar{z}\right)$, $y=[\ 2\ ]\left(z-\bar{z}\right)$ であるからこれを直線の方程式に代入して整理すると $(\ 3\ )z+(\ 4\ )\bar{z}+c=0$ となる。$(\ 3\ )$ を α と表せば $(\ 4\ )=(\ 5\ )$ となるので結局

$\alpha z+(\ 5\ )\bar{z}+c=0$ となる。これを用いれば直線 $x+2y+6=0$ は

$([\ 6\ ])z+([\ 7\ ])\bar{z}+12=0$ となる。(ここまで)　注意：$(\ 5\ )$ は α で表せ。

11．C：0から1，1から $1+i$，$1+i$ から0に至る三角形の周とするとき，$\displaystyle\int_C \mathrm{Im}\,(z)\,dz$ の値を求めよ。(7点)