

## 2017年度前期末試験問題・応用数学A(ES4)

注意：答のみの問題で，問題番号を囲む括弧は数式上必要な括弧を兼ねていない。例えば

$x^2+2x-3=(1)(x-1)$  となっていたら (1) の正解は  $(x+3)$  であり， $((1))(x-1)$  となっていたら正解は  $x+3$  である。また， unnecessary 括弧をつけた解答も減点もしくは 0 点とする。

1. 熱伝導方程式  $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  ( $0 < x < 1, t > 0$ ) … ① を条件

$$u(0, t) = u(1, t) = 0 \quad (t \geq 0) \quad \dots \text{②}, \quad u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)\pi x}{2n-1} \quad (0 \leq x \leq 1) \quad \dots \text{③}$$

の下で解く次の解法の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙に書け。ただし，答のみ。(25点)

(ここから)  $u(x, t) = X(x)T(t)$  という形の①の解で，条件②を満たし恒等的に 0 でないものを求め

める。①に代入して整理すると  $\frac{T'(t)}{T(t)} = (1)$  ( $=\lambda$  とおく) 左辺は  $x$  を含まず右辺は  $t$  を含まな

いので  $\lambda$  は定数である。これから  $T'(t) - \lambda T(t) = 0$  … ④,  $(2) = 0$  … ⑤ となる。⑤の一般解を求めると， $A, B$  を任意定数として

$$\lambda > 0 \text{ のとき } X(x) = A(3) + B(4) \quad \dots \text{⑥} \quad (\text{ただし, } x \geq 0 \text{ で } (3) \geq (4))$$

$$\lambda = 0 \text{ のとき } X(x) = (5) + B \quad \dots \text{⑦}$$

$$\lambda < 0 \text{ のとき } X(x) = A \cos(6) + B \sin(6) \quad \dots \text{⑧}$$

条件②と恒等的に 0 でないものだから  $X(0) = X(1) = 0$  が導かれる。これを満たすように  $A, B$  を求めると  $\lambda \geq 0$  のときは  $A = B = 0$  となってしまう恒等的に  $X(x) = 0$  となるから求める解は得られない。

$\lambda < 0$  のとき⑧より  $X(0) = A, X(1) = (7)$ , これから  $A = 0, B \neq 0, \sin(8) = 0$

従って  $(8) = n\pi \therefore \lambda = (9)$  ( $n$  は自然数) よって求める⑤の解は⑧より

$X(x) = B \sin(10)$  ( $B \neq 0$ ) となる。一方  $\lambda = (9)$  のとき④の一般解は

$T(t) = C(11)$  ( $C$  は任意定数) となる。従って

$$u_n(x, t) = (11) \sin(10) \quad \dots \text{⑨} \quad (n \text{ は自然数})$$

はすべて条件②を満たす①の解である。しかし条件③を満たしていない。そこで  $u_n(x, t)$  の線形結合としての級数

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n u_n(x, t) \quad \dots \text{⑩} \quad (C_n \text{ は任意定数})$$

は条件②を満たす①の解である。さらにこれが条件③を満たすように係数  $C_n$  を定めると

$$C_n = \begin{cases} (12) & (n = 2k) \\ (13) & (n = 2k-1) \end{cases} \quad (k = 1, 2, \dots) \text{ となる。以上より②, ③を満たす①の解は}$$

$u(x, t) = (14)$  となる。(ここまで)

2. 周期関数  $f(x) = \begin{cases} -1 & (-2 \leq x < 0) \\ x & (0 \leq x < 2) \end{cases}$ ,  $f(x+4) = f(x)$  について次の各問いに答えよ。(25点)

注意：(1) は答のみ。(2), (3) は解法を書け。

(1)  $f(x)$  の Fourier 級数を求める次の計算の [ ] に入る最も適切な答えを解答用紙に書け。

(ここから) 周期が 4 であるから求める Fourier 級数を  $c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos [ 1 ] x + b_n \sin [ 1 ] x)$

とする。  $c_0 = [ 2 ] \int_{-2}^2 f(x) dx = [ 3 ]$  となる。次に

$$a_n = [ 4 ] \left( \int_{-2}^0 (-1) \cos [ 1 ] x dx + \int_0^2 x \cos [ 1 ] x dx \right) \cdots \textcircled{1}$$

$\int_{-2}^0 (-1) \cos [ 1 ] x dx = [ 5 ]$ ,  $\int_0^2 x \cos [ 1 ] x dx = [ 6 ]$  より, これらを①に代入して

$a_n = [ 7 ]$  となる。最後に

$$b_n = [ 4 ] \left( \int_{-2}^0 (-1) \sin [ 1 ] x dx + \int_0^2 x \sin [ 1 ] x dx \right) \cdots \textcircled{2}$$

$\int_{-2}^0 (-1) \sin [ 1 ] x dx = [ 8 ]$ ,  $\int_0^2 x \sin [ 1 ] x dx = [ 9 ]$  より, これらを②に代入して

$b_n = [ 10 ]$  となる。以上より  $f(x)$  の Fourier 級数は  $[ 11 ]$  となる。(ここまで)

(2) (1) の結果を用いて  $f(x)$  の複素 Fourier 級数を求めよ。

(3) (1) の結果を用いて級数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$  の値を求めよ。

3. 次の関数  $f(x)$  の Fourier 変換  $F(u) = F[f(x)]$  を求めよ。ただし, 答のみ。(8点)

$$(1) f(x) = \begin{cases} e^x & (x \leq 0) \\ 0 & (x > 0) \end{cases}$$

$$(2) f(x) = \begin{cases} 1 & (a \leq x \leq b) \\ 0 & (x < a, x > b) \end{cases} \quad \text{ただし, } 0 < a < b \text{ とする。}$$

$$(3) f(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{a}\right) \quad \text{ただし, } a > 0 \text{ なる定数で, } \exp x = e^x \text{ である。}$$

$$(4) f(x) = x \exp(-2x^2)$$

4. 熱伝導方程式  $\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$  ( $t > 0, -\infty < x < \infty$ )  $\cdots \textcircled{1}$  を

条件  $f(x, 0) = \exp(-x^2)$  ( $-\infty < x < \infty$ )  $\cdots \textcircled{2}$  の下で Fourier 変換を用いて解く。なお,

$f(x, t)$  の  $x$  に関する Fourier 変換を  $F(u, t)$  と表し,  $F\left[\frac{\partial f}{\partial t}\right] = \frac{\partial F}{\partial t}$  が成り立つものとする。

(14点) 注意: (1) は答のみ。(2), (3) は解法を書け。

(1) ①の両辺の Fourier 変換を取るにより  $F(u, t)$  が満たすべき偏微分方程式を求めよ。

(2) (1) で求めたものを変数  $t$  に関する 1 階微分方程式とみて, 条件②を満たす解を求めよ。

(3) (2) で求めたものの逆 Fourier 変換を考えることにより②を満たす①の解を求めよ。

5. 奇関数  $f(x) = \begin{cases} -\frac{x}{2} & (|x| \leq 2) \\ 0 & (|x| > 2) \end{cases}$  について、次の問いに答えよ。ただし、答のみ。(3点)

(1)  $f(x)$  の Fourier 正弦変換  $S(u)$  を求めよ。

(2)  $f(x)$  の Fourier 変換  $F(u)$  を求めよ。

6. 次の各問いに答えよ。(25点)

(1) 偶関数  $f(x) = e^{-|x|} \cos x$  について、次のものを求めよ。ただし、[2] は答のみ。

[1] Fourier 余弦変換  $C_f(u)$       [2] Fourier 変換  $F(u)$

(2) 奇関数  $g(x) = e^{-|x|} \sin x$  について、次のものを求めよ。ただし、[2] は答のみ。

[1] Fourier 正弦変換  $S_g(u)$       [2] Fourier 変換  $G(u)$