2017年度前期中間試験問題・応用数学A（ES4）

注意： 答のみの問題で，問題番号を囲む括弧は数式上必要な括弧を兼ねていない。例えば $x^2+2x-3=(\ 1\ )(x-1)$ となっていたら（ 1 ）の正解は $(x+3)$ であり，$((\ 1\ ))(x-1)$ となっていたら正解は $x+3$ である。また，不必要な括弧をつけた解答も減点もしくは０点とする。

１．次の各問いに答えよ。ただし，答のみ。(25点)

（1） 次の関数 $f(t)$ の Laplace 変換 $F(s)$ を求めよ。なお，$F(s)$ の定義域は答えなくてよい。

［1］ $t\sinh 3t$（注意：双曲線関数である）　［2］ $te^{2t}\sinh 3t$

［3］ $((t-1)\sinh 3(t-1))U(t-1)$　［4］ $\dfrac{d}{dt}(t\sinh 3t)$　［5］ $\displaystyle\int_0^t \tau\sinh 3\tau\, d\tau$

［6］ $\dfrac{\sinh 3t}{t}$　［7］ $t*\sinh 3t$ (畳込み)

［8］ $f'(t)+f(t)=\sin t$, $f(0)=1$ を満たすもの

（2） 次の関数 $F(s)$ の逆 Laplace 変換 $f(t)$ を求めよ。

［1］ $\dfrac{s-2}{s^2-6s+13}$　［2］ $\dfrac{1}{s^2-5s+6}$　［3］ $\dfrac{5}{(s+3)^4}$

［4］ $\dfrac{3s^2-3s+2}{(s+2)(s-2)(s-3)}$

２．次の各問いに答えよ。ただし，答のみ。(25点)

（1） 次の微分方程式の解法の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙にかけ。

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dx}{dt}-2x=\delta(t),\ x(0)=x'(0)=0 \quad (\delta(t)：\text{デルタ関数})$$

(ここから) $X=\pounds[x(t)]$ とする。微分方程式の両辺の Laplace 変換をとれば，左辺：([1])X，右辺：[2] だから $X=$[3] となる。従って $x(t)=\pounds^{-1}$[[3]]=[4] (ここまで)

（2） 次の畳込みの Laplace 変換を求めよ。

［1］ $e^t*\delta(t)$　［2］ $t*\sin 3t$

（3） $\pounds[f(t)]=F(s)$ のとき，次の関数の逆 Laplace 変換を $f(t)$ の積分で表せ。

［1］ $\dfrac{F(s)}{s^2+4s+13}$　［2］ $\dfrac{F(s)}{s^2-6s+9}$

（4） 積分方程式 $\displaystyle\int_0^t x(\tau)e^{t-\tau}d\tau=t$ を満たす関数 $x(t)$ を求める次の解法の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙にかけ。

(ここから) $X=\pounds[x(t)]$ とする。積分方程式の両辺の Laplace 変換をとれば，左辺：[1]X，右辺：[2] だから $X=$[3] となる。従って $x(t)=\pounds^{-1}$[[3]]=[4] (ここまで)

（5） 関数 $f(t)=\begin{cases}1 & (0<t\leqq 2,\ t>3)\\ 0 & (2<t\leqq 3)\end{cases}$ について，次の問いに答えよ。

［1］ $f(t)$ を単位ステップ関数を用いて表せ。　　［2］ $\pounds[\,f(t)\,]$ を求めよ。

（6） 次の計算の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙にかけ。

(ここから) $F(s)=\dfrac{s}{\left(s^2+4\right)^2}$ の逆 Laplace 変換を畳込みを用いて求める。

$\pounds^{-1}\left[\dfrac{s}{s^2+4}\right]=\cos 2t$, $\pounds^{-1}\left[\dfrac{1}{s^2+4}\right]=[\ 1\ ]$ であるから

$\pounds^{-1}[F(s)]=\cos 2t*[\ 1\ ]=\displaystyle\int_0^t \cos 2\tau\,([\ 2\ ])\,d\tau=[\ 3\ ]\int_0^t\{\sin 2t+[\ 4\ ]\}\,d\tau=[\ 5\ ]$

(ここまで)

3．関数 $f(t)=\begin{cases} t & (0<t\leqq 2) \\ 4-t & (2<t\leqq 4) \\ 0 & (t>4) \end{cases}$ について，次の問いに答えよ。(16点)

（1） Laplace 変換の定義に従って $F(s)=\pounds[\,f(t)\,]$ $(s>0)$ を求めよ。

（2） 単位ステップ関数を用いて $f(t)$ を表して $F(s)=\pounds[\,f(t)\,]$ $(s>0)$ を求める次の計算の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙にかけ。ただし，答のみ。

(ここから) $f(t)=tU(t)-[\ 1\ ]\,U(t-2)+([\ 2\ ])\,U(t-4)$ だから $\pounds[\,tU(t)\,]=[\ 3\ ]$，

$\pounds[\,[\ 1\ ]\,U(t-2)\,]=[\ 4\ ]$，$\pounds[\,([\ 2\ ])\,U(t-4)\,]=[\ 5\ ]$ となるので $F(s)=[\ 6\ ]$

(ここまで)

（3） 関数 $g(t)$ は周期 4 の関数で，最初の 1 周期分において $g(t)=f(t)$ $(0<t\leqq 4)$ が成り立っているものとする。$G(s)=\pounds[\,g(t)\,]$ $(s>0)$ を求めよ。

4．$\Gamma(p)=\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}x^{p-1}\,dx$ $(p>0)$ を Gamma (ガンマ) 関数という。このとき，次の計算の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙にかけ。ただし，答のみ。(9点)

(ここから) $\alpha>-1$ のとき $\pounds[\,t^\alpha\,]$ $(s>0)$ を求める。

$\pounds[\,t^\alpha\,]=\displaystyle\int_0^\infty e^{-st}t^\alpha\,dt=\int_0^\infty e^{-x}(\ 1\ )\,dx$ $(x=st$ と置換$)$

$=\dfrac{1}{s^{(\ 2\ )}}\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}x^{(\ 3\ )}\,dx=\dfrac{\Gamma((\ 4\ ))}{s^{(\ 2\ )}}$ $\quad\therefore\ \pounds[\,t^\alpha\,]=\dfrac{\Gamma((\ 4\ ))}{s^{(\ 2\ )}}$ … ① となる。

部分積分法から $\Gamma(p)=((\ 5\ ))\,\Gamma((\ 5\ ))$ が成り立つ。$(p>1)$ これらから $\pounds[\,t\sqrt{t}\,]$ を①を用いて求めると，$\pounds[\,t\sqrt{t}\,]=\dfrac{\Gamma((\ 7\ ))}{s^{(\ 6\ )}}=\dfrac{(\ 8\ )}{s^{(\ 6\ )}}\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)=(\ 9\ )\dfrac{1}{s^{(\ 6\ )}}$ (ここまで)

5．多項式係数線形微分方程式

$$t\frac{d^2x}{dt^2}+2\frac{dx}{dt}+(2-t)x=2e^t\quad(t>0),\ x(0)=0,\ x'(0)=1\ \cdots\ ①$$

について $X=X(s)=\pounds[\,x(t)\,]$ とするとき，次の問いに答えよ。ただし，(1)，(2)，(3) は答のみ。(15点)

（1） $\pounds[\,t\,x\,(t)\,]$ を X を用いて表せ。　　（2） $\pounds\left[\,t\,\dfrac{d^2x}{dt^2}\,\right]$ を X を用いて表せ。

（3） ①の Laplace 変換をとると $\dfrac{dX}{ds}-[\ 1\ ]X=[\ 2\ ]$ … ② となる。[1]，[2]を答えよ。なお，いずれも s のみの式である。

（4） X の微分方程式②を解き，さらに $x\,(t)$ を求めよ。なお，$x\,(0)=0$ は $\lim_{t\to+0} x\,(t)=0$ と考えよ。

6． $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\cos tx}{x^2+a^2}\,dx$ （$a>0$：定数）を Laplace 変換を用いて求める次の計算の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙にかけ。ただし，答のみ。(10点)

(ここから) $s>0$ に対して $\cos tx$ を t の関数と見て Laplace 変換を考える。積分順序の変更が可能であると仮定すれば

$$\pounds\left[\int_0^{\infty}\frac{\cos tx}{x^2+a^2}\,dx\right]=\int_0^{\infty}\frac{\pounds[\cos tx]}{x^2+a^2}\,dx=\int_0^{\infty}(\ 1\ )\frac{1}{x^2+a^2}\,dx$$

被積分関数を部分分数に分解すれば

$$\int_0^{\infty}(\ 1\ )\frac{1}{x^2+a^2}\,dx=(\ 2\ )\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{x^2+a^2}-(\ 3\ )\right)dx=(\ 4\ )$$

$$\therefore\ \int_0^{\infty}\frac{\cos tx}{x^2+a^2}\,dx=\pounds^{-1}[(\ 4\ )]=(\ 5\ )$$ (ここまで)