2016年度応用数学A (E4) 応用数学 (D4) 学年末試験問題

J 曲線の向きは特に断らない限り正の向きとする。

１．次の各問いに答えよ。ただし，答のみ。(25点)

（1） 関数 $f(z)=\dfrac{1}{z-2}$ の次の曲線 C に沿う積分の値を求めよ。

［1］ $C: |z|=1$ ［2］ $C:$ 3点 $z=3, i, -i$ でつくられる三角形の周

（2） 関数 $f(z)=\dfrac{1}{z^2+9}$ の次の曲線 C に沿う積分の値を求めよ。

［1］ $C:$ 原点を中心とする単位円の上半分に沿って $z=-1$ から $z=1$ に至る曲線。

［2］ $C:$ 原点を中心とする単位円の左半分に沿って $z=-i$ から $z=i$ に至る曲線。

（3） 次の各積分の値を求めよ。ただし，C はその右に示す円とする。

［1］ $\displaystyle\int_C \frac{2z+1}{z(z-4)}\,dz$, $C: |z-3|=2$ ［2］ $\displaystyle\int_C \frac{z+1}{z^2+1}\,dz$, $C: |z|=2$

（4） 次の留数の値を求めよ。

［1］ $\mathrm{Res}\left[\dfrac{e^z}{z^3}, 0\right]$ ［2］ $\mathrm{Res}\left[\dfrac{z+1}{z^2(z-3)}, 0\right]$

（5） 次の等比級数の収束，発散を判定し，収束するならば和を求め，発散するならば $\boxed{\text{発散}}$ と答えよ。

［1］ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-i}{2}\right)^n$ ［2］ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{3}+i}{3}\right)^{n-1}$

（6） 次の関数の右に示した環状領域における Laurent 展開を求めよ。なお，$1/z=\dfrac{1}{z}$ である。

［1］ $f(z)=\dfrac{1}{(z+2)(z+1)}$ $0<|z+1|<1$ ［2］ $f(z)=ze^{1/z}$ $0<|z|<\infty$

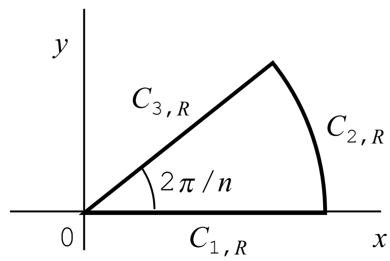
（7） 次の関数の $z=1$ を中心とする Taylor 展開を求めよ。また収束半径も併記せよ。

［1］ $f(z)=\dfrac{1}{3-z}$ ［2］ $f(z)=\dfrac{1}{(3-z)^2}$

２．関数 $f(z)=\dfrac{z^k}{z^n+1}$ と $C_{1,R}: z=t\ (0\leqq t\leqq R)$, $C_{2,R}: z=Re^{it}\ \left(0\leqq t\leqq\dfrac{2\pi}{n}\right)$,

$C_{3,R}: z=te^{i\frac{2\pi}{n}}\ (0\leqq t\leqq R)$, $C_R=C_{1,R}+C_{2,R}-C_{3,R}$ について，次の問いに答えよ。なお，k, n は $0\leqq k<n-1$ を満たす整数とする。(25点)

（1） $R>1$ のとき，$\displaystyle\int_{C_R} f(z)\,dz$ を留数定理を用いて求めよ。



（2） $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_{C_{2,R}} f(z)\,dz = 0$ を示す次の証明の［　］には入る最も適切な答えを解答用紙にかけ。ただし，答のみ。

(ここから) $R \geqq \sqrt[n]{2}$ ならば $1-\dfrac{1}{R^n} \geqq$［１］… ① だから，$C_{2,R}$ 上で①と三角不等式を用いれば $|f(z)| \leqq \dfrac{R^k}{[\ 2\ ]} \leqq \dfrac{[\ 3\ ]}{R^n}$ が成り立つ。従って

$$0 \leqq \left|\int_{C_{2,R}} f(z)\,dz\right| \leqq \frac{[\ 4\ ]}{R^n}\int_0^{[\ 5\ ]} dt = \frac{4\pi}{nR^{[\ 6\ ]}} \to 0\ (R\to\infty)\ (\because k, n \text{ の条件から})$$

よって示された。(ここまで)

（3） $I_R = \displaystyle\int_{C_{1,R}} f(z)\,dz$ と置くとき，$\displaystyle\int_{C_{3,R}} f(z)\,dz$ を I_R を用いて表せ。

（4） 実積分 $I = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^k}{x^n+1}\,dx$ を求めよ。　　（5） $\displaystyle\lim_{n\to\infty} I$ を求めよ。ただし，答のみ。

(東京大 改)

３．$f(z) = \mathrm{Log}\,(1+z)$ の点 $z=1$ を中心とするTaylor展開を求める次の計算の括弧に入る最も適切な答たえを解答用紙にかけ。ただし，答のみ。(8点)

(ここから) $f'(z) =$（１），$f''(z) =$（２），…，$f^{(n)}(z) =$（３）（n：自然数）だから

$f^{(n)}(1) =$（４） ∴ $\dfrac{f^{(n)}(1)}{n!} =$（５），従って $|z-1| <$（６）のとき $f(z)$ のTaylor展開は（７）となる。(ここまで)

４．実積分 $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(3+2\cos\theta)^2}$ の値を複素積分を用いて求めよ。(8点)

５．関数 $f(z) = \dfrac{e^{-z}}{z^3+1}$ について，次の問いに答えよ。ただし，答のみ。(9点)

（1） $f(z)$ の極をすべて求めよ。

以下，（1）で求めた極を $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ と表す。ただし，$\mathrm{Im}(\alpha_1) > 0$, $\mathrm{Im}(\alpha_2) = 0$, $\mathrm{Im}(\alpha_3) < 0$ とする。

（2） $\mathrm{Res}[f, \alpha_1]$ を求めよ。　　（3） $\mathrm{Res}[f, \alpha_2]$ を求めよ。

（4） $\mathrm{Res}[f, \alpha_3]$ を求めよ。　　（5） $C: |z-1| = \sqrt{2}$ のとき，$\displaystyle\int_C f(z)\,dz$ を求めよ。

6．関数 $f(z)=\dfrac{1}{z^2+4}$ ，$R>0$ に対し曲線 $C_R : z=Re^{it}$ $\left(0\leqq t\leqq\pi\right)$ と線分 $\Gamma_R : z=t$ $\left(-R\leqq t\leqq R\right)$ について，次の問いに答えよ。(16点)

(1)　$R>2$ のとき，$\displaystyle\int_{C_R+\Gamma_R} f(z)\,e^{iz}dz$ を求めよ。

(2)　$\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)\,e^{iz}dz=0$ を示す次の論証の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙にかけ。ただし，答のみ。

(ここから)　C_R 上で $\left|\dfrac{dz}{dt}\right|=[\ 1\ ]$ である。また $R\geqq 2\sqrt{2}$ なる R に対し，C_R 上で

$$|f(z)|=\left|\frac{1}{z^2+4}\right|\leqq\frac{1}{R^2-4}=\frac{1}{R^2\left(1-\dfrac{4}{R^2}\right)}\leqq[\ 2\ ]\quad\left(\because\ 1-\frac{4}{R^2}\geqq[\ 3\ ]\right)$$

また同じく C_R 上で $\left|e^{iz}\right|\leqq e^{[\ 4\ ]}\leqq 1$ $\left(\because\ 0\leqq t\leqq\pi\right)$ となる。以上より

$$0\leqq\left|\int_{C_R} f(z)\,e^{iz}dz\right|\leqq\int_0^{\pi}[\ 5\ ]\,dt=[\ 6\ ]\quad\therefore\ \lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)\,e^{iz}dz=0$$ (ここまで)

(3)　実積分 $I=\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\cos x}{x^2+4}\,dx$ の値を求めよ。なお，この広義積分は収束することは用いてよい。

7．関数 $f(z)=\dfrac{z-\sin z}{z^4}$ について，次の問いに答えよ。なお，$\dfrac{b}{a}$ を b/a と表すことがある。(9点)

(1)　$r>0$ に対して $C_r : z=re^{i(t-\pi/2)}$ $\left(0\leqq t\leqq\pi\right)$ とするとき，$\displaystyle\lim_{r\to+0}\int_{C_r} f(z)\,dz$ を求めよ。

(2)　$r>0$ に対して $\Gamma_r : z=re^{i(3\pi/2-t)}$ $\left(0\leqq t\leqq\pi\right)$ とするとき，$\displaystyle\lim_{r\to+0}\int_{\Gamma_r} f(z)\,dz$ を求めよ。ただし，答のみ。