2016年度応用数学A (E4) 応用数学 (D4) 後期中間試験問題

全体の注意：特に断らない限り x, y, u, v は実数を，z, w は複素数を表す。

１．次の各問いに答えよ。ただし，答のみ。(25点)

(1) 次の値を求め，$x+iy$ の形で答えよ。

[1] $(1+i)^8$　　[2] e^i　　[3] $\displaystyle\lim_{z\to 2+i}\frac{z^2}{z-2}$　　[4] $\sqrt{-i}$

[5] $\mathrm{Log}\left(\sqrt{3}-i\right)$　　[6] $\log i$

(2) 次の計算の [　] に入る最も適切な答えを解答用紙にかけ。

$z=x+iy$ とすれば $e^z=$[1]$+i$[2] であるから $\overline{e^z}=$[1]$-i$[2] である。また，
$e^{i\,\mathrm{Im}(z)}=$[3]$+i$[4] であるから $\left|e^{i\,\mathrm{Im}(z)}\right|=$[5] となる。
次に $z=(-3+5i)(1+2i)$ とすれば $\mathrm{Re}(z)=$[6]，$\mathrm{Im}(z)=$[7]，$|z|=$[8]，
$\bar{z}=$[9] となる。([9] は $x+iy$ の形で答えよ)
$\dfrac{1}{4}(1+i)^4$ を極形式 $re^{i\theta}$ $\left(r>0,\ 0\leqq\theta<2\pi\right)$ で表すと $r=$[10]，$\theta=$[11] となる。

(3) 次の関数を微分せよ。なお，多価関数は適当に値域を制限し１価関数とする。

[1] $w=\left(z^2+i\right)\left(z^2+iz-1\right)$ (展開した式を答えよ)　　[2] $w=\cot z$

[3] $w=\sqrt[3]{z}$　　[4] $w=\dfrac{1}{(i-z)^2}$　　[5] $w=\left(z^2-iz-1\right)^6$

(4) 関数 $w=(z+i)^2$ について，$w=u+iv$，$z=x+iy$ とおくとき，
[1] u は x, y のどんな関数か。　　[2] v は x, y のどんな関数か。

２．次の各問いに答えよ。ただし，答のみ。(25点)

(1) $z^3=-8i$ を解け。

(2) 次の関数が正則ならばその導関数を x, y で表せ。そうでない場合は正則でないと答えよ。
なお，$z=x+iy$ とする。

[1] $f(z)=x\left(x^2-3y^2\right)+iy\left(3x^2-y^2\right)$　　[2] $f(z)=\left(x^2-y^2\right)+i(2xy-1)$

(3) $R>0$ について，線分 $\Gamma: z=t+it$ $\left(0\leqq t\leqq R\right)$，$\Gamma_1: z=t$ $\left(0\leqq t\leqq 2R\right)$，
$\Gamma_2: z=(2R-t)+it$ $\left(0\leqq t\leqq R\right)$ とおくとき，次の計算の [　] に入る最も適切な答えを解答用紙にかけ。(ここから) $f(z)=\exp\left(-z^2\right)$ とする。$\left(\exp z=e^z\right)$ Γ_2 上で $|f(z)|=e^{[\ 1\ ]}$ であり

$\left|\dfrac{dz}{dt}\right|=$[2] であるから，$\left|\displaystyle\int_{\Gamma_2}f(z)\,dz\right|\leqq[\ 2\ ]\int_0^R e^{[\ 1\ ]}dt=\dfrac{1}{[\ 3\ ]R}\left(1-e^{[\ 4\ ]}\right)$

$([\ 3\ ]>0)$ $\therefore\ \displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_2}f(z)\,dz=0$ … ① また $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_1}f(z)\,dz=[\ 5\ ]$ … ② となる。

Γ 上では $f(z)=$[6]$-i$[7]，$\dfrac{dz}{dt}=$[8] であるから，

$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz=\int_0^R ([\ 6\ ]-i\,[\ 7\ ])\,[\ 8\ ]\,dt \cdots ③$$

Jordan 曲線 C を $C=\Gamma_1+\Gamma_2-\Gamma$ とすれば $f(z)$ は複素数平面全域で正則だから Cauchy の積分定理から $\int_C=\int_{\Gamma_1}+\int_{\Gamma_2}-\int_{\Gamma}=0\quad\therefore\ \int_{\Gamma}=\int_{\Gamma_1}+\int_{\Gamma_2}\ \cdots ④$

①～④より $\int_0^{\infty}([\ 6\ ]-i\,[\ 7\ ])\,[\ 8\ ]\,dt=[\ 5\ ]$

$\therefore\ \int_0^{\infty}([\ 6\ ]-i\,[\ 7\ ])\,dt=[\ 9\ ]\ \cdots ⑤$ （[9] は $x+iy$ の形で答えよ）

⑤の両辺の実部，虚部を比較して $\int_0^{\infty}[\ 6\ ]\,dt=[\ 10\ ]$，$\int_0^{\infty}[\ 7\ ]\,dt=[\ 11\ ]$ となる。

これを利用すれば $\int_0^{\infty}\cos\left(t^2\right)dt=[\ 12\ ]$ となる。

３．次の積分の値を求めよ。ただし，(1)，(2) は答のみ。(16点)

(1) $\int_C \left(z^2-iz+2\right)dz$，$C: z=2t+it\ \left(0\leqq t\leqq 1\right)$

(2) $\int_C \frac{1}{z-2}\,dz$，$C: |z-2|=1$

(3) $\int_C \mathrm{Im}\,(z)\,dz$，$C$: 0 から $1+i$，$1+i$ から i，i から 0 に至る三角形の周

(4) $\int_C \frac{1}{z^2+9}\,dz$，$C$: 原点を中心とする単位円の左半分に沿って $-i$ から i に至る曲線

４．$f(z)=\begin{cases}\dfrac{x^4-2y^4}{x^3+y^3}+i\,\dfrac{2x^4+y^4}{x^3+y^3} & (z\neq 0)\\ 0 & (z=0)\end{cases}$，$z=x+iy$ について，次の各問いに答えよ。(9点)

(1) $f(z)$ の実部関数，虚部関数をそれぞれ $u(x,y)$，$v(x,y)$ と表すとき，$u_x(0,0)$，$u_y(0,0)$，$v_x(0,0)$，$v_y(0,0)$ を求め，原点で Cauchy−Riemann の関係式が成り立つことを示せ。

(2) 次の計算の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙にかけ。ただし，答のみ。

(ここから) $(x,y)\neq(0,0)$ に対して，$\varepsilon=u(x,y)-u(0,0)-u_x(0,0)\,x-u_y(0,0)\,y$ とおく。(1) で求めた $u_x(0,0)$，$u_y(0,0)$ の値を代入すると $\varepsilon=\dfrac{([\ 1\ ])\,xy}{x^3+y^3}$ となる。

そこで $\lim_{z\to 0}\dfrac{\varepsilon}{|z|}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{x^2+y^2}}\ \cdots ①$ を考える。直線 $y=x$ に沿って原点に近づけるとき $x\to+0$ ならば①の値は [2] となり，$x\to-0$ ならば①の値は [3] となる。いずれにせよ①の値は 0 にならないから $u(x,y)$ は原点で [4] 不可能である。(ここまで)

５．微分方程式 $\left(1+e^x \sin y\right)dx+\left(1+e^x \cos y\right)dy=0$ … ① について，次の各問いに答えよ。(8点)

（1） $P=1+e^x \sin y$, $Q=1+e^x \cos y$ と置くとき，次のものを求めよ。ただし，答のみ。

［1］ $\dfrac{\partial P}{\partial y}$　　［2］ $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ （注意：両方正解で点を与える）

（2） この微分方程式の一般解を求めよ。

６．微分方程式 $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}-x\dfrac{dy}{dx}+y=x^2\left(3x^2+2\right)$　$(x>0)$ … ① について，次の各問いに答えよ。(17点)

（1） $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}-x\dfrac{dy}{dx}+y=0$ … ② の恒等的には０でない１つの解を $y_1=x^\alpha$ と予想して求めよ。なお，α は定数で y_1 は任意定数をつけなくてよい。ただし，答のみ。

（2） $u=u(x)$, $y_2=uy_1$ として，この y_2 が②の恒等的には０でない解となるように u を求めよ。なお，u は任意定数をつけなくてよい。

（3） 上で求めた y_1, y_2 についてロンスキアン $W\left(y_1, y_2\right)$ を求めよ。ただし，答のみ。

（4） ①の一般解を求めよ。