2016年度応用数学A (E4) 応用数学 (D4) 前期末試験問題

１．周期４の関数 $f(x)=\begin{cases} -1 & (-2 \leqq x < 0) \\ x & (0 \leqq x < 2) \end{cases}$, $f(x+4)=f(x)$ について，次の各問いに答えよ。

なお，記号 N は自然数全体の集合を表す。ただし，$\boxed{\text{答のみ。}}$ (25点)

（1） $f(x)$ のFourier級数の定数項 c_0 を求めよ。

（2） $f(x)$ のFourier級数の余弦関数の係数 a_n $(n \in \mathrm{N})$ を求める次の計算の［　］に入る最も適切な答えを解答用紙にかけ。

$$a_n=\frac{1}{2}\left(\int_{-2}^{0}[\ 1\ ]\,dx+\int_{0}^{2}[\ 2\ ]\,dx\right),\ \text{ここで}\ \int_{-2}^{0}[\ 1\ ]\,dx=\big[[\ 3\ ]\big]_{-2}^{0}=[\ 4\ ],$$

$$\int_{0}^{2}[\ 2\ ]\,dx\overset{①}{=}\big[[\ 5\ ]\big]_{0}^{2}-\int_{0}^{2}[\ 6\ ]\,dx=[\ 7\ ]\ \text{となるから}$$

$$a_n=\frac{1}{2}([\ 4\ ]+[\ 7\ ])=[\ 8\ ]=\begin{cases}[\ 9\ ] & (n=2k-1) \\ [\ 10\ ] & (n=2k)\end{cases},\ k\in \mathrm{N}$$

（注意：①は部分積分法）

（3） $f(x)$ のFourier級数の正弦関数の係数 b_n $(n \in \mathrm{N})$ を求める次の計算の［　］に入る最も適切な答えを解答用紙にかけ。

$$b_n=\frac{1}{2}\left(\int_{-2}^{0}[\ 1\ ]\,dx+\int_{0}^{2}[\ 2\ ]\,dx\right),\ \text{ここで}\ \int_{-2}^{0}[\ 1\ ]\,dx=\big[[\ 3\ ]\big]_{-2}^{0}=[\ 4\ ],$$

$$\int_{0}^{2}[\ 2\ ]\,dx\overset{①}{=}\big[[\ 5\ ]\big]_{0}^{2}+\int_{0}^{2}[\ 6\ ]\,dx=[\ 7\ ]\ \text{となるから}$$

$$b_n=\frac{1}{2}([\ 4\ ]+[\ 7\ ])=\frac{1}{n\pi}([\ 8\ ])$$ （注意：①は部分積分法）

（4） 以上の結果から $f(x)$ の Fourier 級数を解答用紙にかけ。なお a_n は（2）の［8］の答えを用いよ。場合分けした［9］,［10］を用いないこと。

（5） $f(x)$ の複素 Fourier 級数は $f(x)=\sum_{[\ 1\ ]}^{\infty} c_n e^{[\ 2\ ]}=\sum_{[\ 3\ ]}^{\infty}([\ 4\ ])e^{[\ 2\ ]}$ となる。［　］に入る最も適切な答えを解答用紙にかけ。

２．次の各問いに答えよ。(18点)

（1） 上の問題１の結果とFourier級数の収束定理を用いて級数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$ の値を求めよ。

（2） 上の問題１の結果とFourier級数の収束定理を用いて級数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ の値を求めよ。

（3） 問題２(1) の結果を用いて級数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ の値を求めよ。

Hint： $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}$

（この問題は直接Fourier級数とは無関係であり，若干の発想が必要である）

3．$f(x)=e^{-|x|}$ のFourier変換を求める次の計算の（　）に入る最も適切な答えを解答用紙にかけ。ただし，$\boxed{\text{答のみ。}}$ (7点)

$$\mathcal{F}\left[e^{-|x|}\right](u)=\int_{-\infty}^{\infty}(\ 1\ )\,dx=2\int_{0}^{\infty}(\ 2\ )\,dx=2\left[(\ 3\ )\right]_0^{\infty}=(\ 4\ )\quad\left(\because\ \lim_{x\to\infty}(\ 3\ )=0\right)$$

4．問題3の結果を用いて次の各問いに答えよ。なお，a，b は正の定数とする。(16点)

(1) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\cos ax}{1+x^2}\,dx$ を求めよ。　(2) $\mathcal{F}\left[e^{-a|x|}\right](u)$ を求めよ。

(3) $\mathcal{F}\left[e^{-a|x|}*e^{-b|x|}\right](u)$ を求めよ。ただし，$\boxed{\text{答のみ。}}$

(4) $e^{-a|x|}*e^{-b|x|}$ を求めよ。ただし，$a\neq b$ とする。

5．$\displaystyle\iint_D\frac{x+y}{y^2}e^{x+y}\,dxdy$，$D=\left\{(x,y)\mid 0\leqq x\leqq y,\ 1\leqq y\leqq 2\right\}$ を求める次の計算の（　）に入る最も適切な答えを解答用紙にかけ。ただし，$\boxed{\text{答のみ。}}$ (9点)

$u=x+y$，$x=vy$ と変換すれば D は $\varDelta=\left\{(u,v)\mid 0\leqq v\leqq 1,\ (\ 1\ )\leqq u\leqq(\ 2\ )\right\}$ となる。

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}u_x & u_y\\ v_x & v_y\end{vmatrix}=(\ 3\ )\quad\therefore J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\left(\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right)^{-1}=(\ 4\ )$$

（(3)，(4)：x，y の式）

従って $|J|=(\ 5\ )$ となる。以上から $\displaystyle\iint_D\frac{x+y}{y^2}e^{x+y}\,dxdy=\iint_{\varDelta}(\ 6\ )\,dudv$

$$\iint_{\varDelta}(\ 6\ )\,dudv=\int_0^1\left(\int_{(1)}^{(2)}(\ 6\ )\,du\right)dv=\int_0^1((\ 7\ ))\,dv=(\ 8\ )$$

6．曲面 $z=\tan^{-1}\dfrac{y}{x}$ の $x^2+y^2\leqq a^2$，$x\geqq 0$，$y\geqq 0$，$z\geqq 0$ の内部にある部分の面積を求めよ。ただし，a は正の定数とする。(8点)

7．ε を正の定数とするとき，熱伝導方程式

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\quad(t>0,\ -\infty<x<\infty) & \cdots ①\\[2ex] f(x,0)=\dfrac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon}}\exp\left(-\dfrac{x^2}{\varepsilon}\right)\quad(-\infty<x<\infty) & \cdots ②\end{cases}\qquad(\exp x=e^x)$$

をFourier変換を用いて解く次の計算の（　）に入る最も適切な答えを解答用紙にかけ。

ただし，$\boxed{\text{答のみ。}}$ (17点)

$f(x,t)$ の変数 x に関するFourier変換を $F(u,t)$ と表す。即ち

$F(u,t)=\mathcal{F}\left[f(x,t)\right](u)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}f(x,t)\,e^{-iux}\,dx$，①の両辺のFourier変換を計算すると

$\dfrac{\partial F}{\partial t} = (1) F$ となる。これを未知関数 F の変数 t に関する１階常微分方程式とみて解くと

$F(u, t) = \Phi(u) \exp((2))$ となる。ここで②から $\Phi(u) = F(u, 0) = \mathcal{F}[(3)]$

a が正の定数のとき $\mathcal{F}\left[\exp\left(-\dfrac{x^2}{a}\right)\right](u) = (4)$ だから

$\mathcal{F}^{-1}[\exp((2))](x) = (5) \exp((6))$ となる。さらに b が正の定数のとき

$\exp\left(-\dfrac{x^2}{a}\right) * \exp\left(-\dfrac{x^2}{b}\right) = (7) \exp((8))$ だから

$f(x, t) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon}} \exp\left(-\dfrac{x^2}{\varepsilon}\right) * (5) \exp((6)) = \dfrac{1}{\sqrt{((9))\pi}} \exp((10))$

と解が求まった。(ここまで)

以下は問題ではない。時間が余ったら読んでみよ。

コラム： $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ の値は西暦１４００年ごろインドの数学者，Madhava により歴史上初めて求められた。１６７０年代に Leibniz が最初に求めたと思われていたがそれより前にインドの数学者が求めていた。また $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ の値は Euler が最初に求めている。Euler は有名な等式

$\prod_{p:\text{素数}} \dfrac{1}{1-p^{-s}} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ を証明し，この等式の右辺をその後 Riemann が ζ (ゼータ) 関数と命名した。なお，ζ 関数の変数 s は複素数で，解析接続したものを考える。次の予想は Riemann 予想と呼ばれ，Riemann がこの予想を提出して１５０年ほど経過するが，未だに解かれていない。

ζ 関数の非自明な零点はすべて直線 $\mathrm{Re}(s) = \dfrac{1}{2}$ 上にある。

$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ と表す。解析接続した後で，$\zeta(-2) = \zeta(-4) = \zeta(-6) = \cdots = 0$ が成り立つことが知られている。つまり $s = -2k\ (k = 1, 2, \cdots)$ は ζ 関数の零点で実零点と呼ばれており，これが ζ 関数の自明な零点となっている。Riemann 予想はこれ以外のすべての零点(虚零点)が１つの直線上にあるのでは？と言っている。このことは前述したように証明されていないし，反例も見つかっていない。また予想を仮定することによる矛盾も見つかっていない。なお念のために言っておくと問題２(３) の級数は $\zeta(2)$ である。$\zeta(-2)$ ではない。$\zeta(-2) = 1 + 2^2 + 3^2 + \cdots$ である。解析接続するとこの値は ∞ ではなく０になる。ちなみに $\zeta(-1) = 1 + 2 + 3 + \cdots = -\dfrac{1}{12}$ となる。Riemann 予想は歴史上有名な数学者達の挑戦を退けつつ時にはその挑戦した者の人格，人生を破壊して今に至っている。