# 2016年度前期中間試験問題・応用数学A（E4）応用数学（D4）

１．次の各問いに答えよ。ただし，$\boxed{\text{答のみ。}}$ (25点)

（1） 微分方程式 $y''+5y'-6y=x(t)$，$y(0)=y'(0)=0$ で表される線形システムについて

［1］ このシステムの伝達関数 $H(s)$ を求めよ。　［2］ $h(t)=\mathcal{L}^{-1}[H(s)]$ を求めよ。

［3］ 出力 $y(t)$ を入力 $x(t)$ を用いた積分で表せ。なお，［2］の結果を用いた式を答えよ。

（2） 微分方程式 $y''-6y'+8y=\delta(t)$，$y(0)=y'(0)=0$ を解け。

（3） 畳込み $t^3 * t$ を求めよ。　（4） $\mathcal{L}\left[t^3 * t\right]$ を求めよ。

（5） 微分方程式 $\dfrac{d^2x}{dt^2}-16x=0$ の一般解を求めよ。なお，任意定数を $A$，$B$ として答えよ。

（6） 微分方程式 $\dfrac{d^2x}{dt^2}+4x=1$，$x(0)=1$，$x\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=-2$ の解法に関する以下の計算の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙にかけ。

$X(s)=\mathcal{L}[x(t)]$，$A=x'(0)$ と表せば，$\mathcal{L}\left[\dfrac{d^2x}{dt^2}+4x\right]=$［ 1 ］，$\mathcal{L}[1]=$［ 2 ］となるから

この代数方程式を解いて $X=$［ 3 ］となる。従って $x(t)=\mathcal{L}^{-1}$[［ 3 ］]=［ 4 ］となる。最後に

条件 $x\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=-2$ から $A$ を求めれば $x(t)=$［ 5 ］となる。

（7） 積分方程式 $\displaystyle\int_0^t x(u)\cos(t-u)\,du=t$ について，次の各問いに答えよ。ただし，

$X(s)=\mathcal{L}[x(t)]$ と表す。

［1］ この方程式の左辺の $Laplace$ 変換を求めよ。（$X$ を用いた式）

［2］ この方程式の解 $x(t)$ を求めよ。

２．次の各問いに答えよ。ただし，$\boxed{\text{答のみ。}}$ (25点)

（1） 次の関数の $Laplace$ 変換を求めよ。なお，変換後の独立変数を $s$ とせよ。

［1］ $\sin 2t$　［2］ $\sin t\cos t$　［3］ $t^2e^{\alpha t}$（$\alpha$：定数，以下同じ）

［4］ $U\left(t-\dfrac{\pi}{3}\right)\cos\left(t-\dfrac{\pi}{3}\right)$　［5］ $t\sinh t$　［6］ $t\cosh t$

［7］ $t^n e^{2t}$（$n$：正の整数，以下同じ）　［8］ $\dfrac{e^{3t}-e^t}{t}$

（2） 次の関数の逆 $Laplace$ 変換を求めよ。なお，逆変換後の独立変数を $t$ とせよ。

［1］ $\dfrac{1}{s^2-4s+4}$　［2］ $\dfrac{s-2}{s^2-6s+13}$　［3］ $\dfrac{5-s}{(s+1)(s-1)(s-2)}$

［4］ $\dfrac{s+1}{(s-1)^2}$

（3） 次の［　］に入る最も適切な答えを解答用紙にかけ。［ 1 ］~［ 3 ］はすべて正解のとき点を与える。(⇒ 2点)

$$\frac{s^2-3s+7}{(s+3)(s-2)^2}=\frac{[\ 1\ ]}{s+3}+\frac{[\ 2\ ]}{s-2}+\frac{[\ 3\ ]}{(s-2)^2}$$ であるから

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s^2-3s+7}{(s+3)(s-2)^2}\right]=[\ 4\ ]$$

3．２変数関数 $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$ について，次の各問いに答えよ。 $\boxed{\text{(1)，(2) は答のみ。}}$

(9点)

（1） $f_x(0,0)$ が存在するなら，その値を求めよ。

（2） $f_y(0,0)$ が存在するなら，その値を求めよ。

（3） $f(x,y)$ は原点 $(0,0)$ で全微分可能か調べよ。

4．次の計算の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙にかけ。ただし， $\boxed{\text{答のみ。}}$ (11点)

$\omega>0$ より $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s^2+\omega^2}\right](t)=(\ 1\ )$ ，畳込みの $Laplace$ 変換の性質を用いて

(（ 2 ）は上の結果と畳込みを表す記号で答えよ)

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{\left(s^2+\omega^2\right)^2}\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+\omega^2}\cdot\frac{1}{s^2+\omega^2}\right]=(\ 2\ )=\int_0^t(\ 3\ )\,du\ ,$$

三角関数の積を和差に直す公式は $sin\,\alpha\,sin\,\beta=(\ 4\ )$ であり，これを用いて

$$\int_0^t(\ 3\ )\,du=\frac{1}{2\omega^2}\int_0^t\{cos((\ 5\ ))-(\ 6\ )\}\,du=\frac{1}{2\omega^2}[(\ 7\ )]_{u=0}^{u=t}$$

$$=\frac{1}{2\omega^3}((\ 8\ ))$$ となる。

5． $p>0$ を定義域とする下記の右辺の積分で定義される関数を左辺の記号で表し，これをガンマ関数という。 $\Gamma(p)=\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}x^{p-1}\,dx$ ，このとき次の各問いに答えよ。(19点)

（1） $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)$ の値を求めよ。なお， $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ の値は証明なしで用いてよい。

（2） $p>1$ のとき， $\Gamma(p)$ と $\Gamma(p-1)$ の関係を求めよ。なお， $\displaystyle\lim_{x\to\infty}e^{-x}x^{\alpha}=0$ が任意の正定数 $\alpha$ に対して成り立つことを用いてよい。

（3） $\alpha>-1$ を満たす実定数のとき， $\mathcal{L}\left[t^{\alpha}\right](s)$ をガンマ関数を用いて表せ。ただし， $s>0$ とする。

（4） $\mathcal{L}\left[t\sqrt{t}\right](s)$ $(s>0)$ を求めよ。

6．微分方程式 $t\dfrac{d^2x}{dt^2}+(3t-1)\dfrac{dx}{dt}+(2t-3)x=0,\ x(0)=x'(0)=0$ の解法に関する次の計算の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙にかけ。なお， $t>0,\ s+1>0$ とする。(11点)

ただし，$\boxed{\text{答のみ。}}$

$\pounds[x]=X(s)$ と表せば，$\pounds\left[(2t-3)x\right]=$( 1 )，$\pounds\left[(3t-1)\dfrac{dx}{dt}\right]=$( 2 )，

$\pounds\left[t\dfrac{d^2x}{dt^2}\right]=$( 3 )となるので問題の微分方程式の両辺の *Laplace* 変換とると $X$ の微分方程式

$\dfrac{dX}{ds}=$( 4 )$X$ を得る。これを解くと $X=$( 5 ) ( $C$ : 任意定数 ) 以上より $x(t)=$( 6 )となる。

なお，最後で $\dfrac{C}{2}$ を改めて $C$ と置いた。