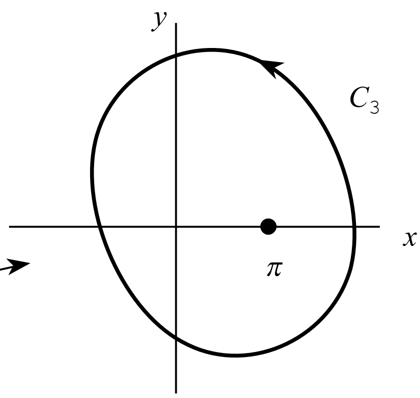
2013年度学年末試験問題・応用数学A（E4）

１．次の問いに答えよ。ただし、<u>答のみ</u>。



（1）　$\displaystyle\int_{C_1} \frac{1}{z-2i}\,dz$ ，C_1：$|z|=3$　を求めよ。

（2）　$\displaystyle\int_{C_2} \frac{z}{z^2+1}\,dz$ ，C_2：$|z|=2$　を求めよ。

（3）　$\displaystyle\int_{C_3} \frac{\cos z}{z-\pi}\,dz$ ，C_3：図の単一閉曲線

を求めよ。

（4）　$f(z)=\dfrac{1}{2-z}$ の $z=1$ を中心とする *Taylor* 展開を求めよ。

答えは $\sum$ を用いて表せ。用いていない場合は０点。

（5）　$f(z)=\dfrac{1}{(2-z)^2}$ の $z=1$ を中心とする *Taylor* 展開を求めよ。答えは $\sum$ を用いて表せ。

用いていない場合は０点。

（6）　$f(z)=z\cos\dfrac{1}{z}$ の $z=0$ を中心とする *Laurent* 展開を求めよ。答えは $\sum$ を用いて表せ。

用いていない場合は０点。

（7）　$f(z)=\dfrac{z-3}{z^2(z+5)}$ のとき、留数 $Res[f,-5]$ を求めよ。

（8）　上の（7）と同じ関数について、$Res[f,0]$ を求めよ。

（9）　$\displaystyle\int_{C_4} \frac{z-3}{z^2(z+5)}\,dz$ ，C_4：$|z|=6$ を求めよ。

（10）　$\displaystyle\int_{C_5} \frac{z-3}{z^2(z+5)}\,dz$ ，C_5：$|z|=4$ を求めよ。

（11）　$f(z)=\dfrac{1}{\sin\left(\dfrac{1}{z}\right)}$ ，$\alpha_n=\dfrac{1}{n\pi}$　（n：自然数）とするとき、$Res\left[f,\alpha_n\right]$ を求めよ。

２．$\displaystyle\int_C \frac{z}{(z-\alpha)(z-\beta)}\,dz$ ，C：$|z|=R$ について、次の問いに答えよ。ただし、$R>0$ で

α,β は０でないとする。

（1）　$f(z)=\dfrac{z}{(z-\alpha)(z-\beta)}$ とおくとき、この関数の孤立特異点における留数を求めよ。

（2）　$0<|\alpha|<|\beta|$ のとき、R がそれぞれ $R<|\alpha|$ ，$|\alpha|<R<|\beta|$ ，$R>|\beta|$ のときの問題の積分を求めよ。

（3）　$|\alpha|=|\beta|$ かつ $R>|\alpha|$ のとき、問題の積分を求めよ。

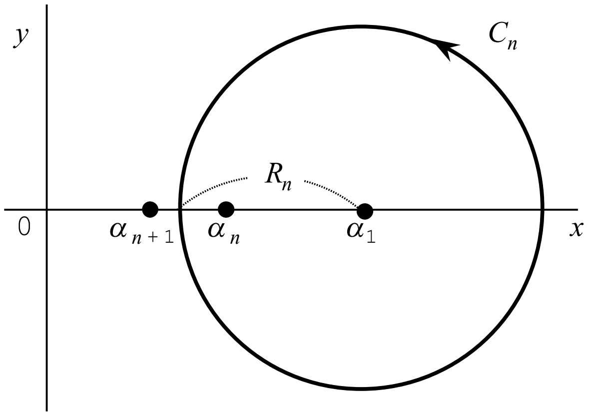
３．問題１．（11）の関数 $f(z)$ と点 α_n について、次の問いに答えよ。ただし、

$\alpha_1-\alpha_n<R_n<\alpha_1-\alpha_{n+1}$ を満たす R_n に対して、C_n : $|z-\alpha_1|=R_n$ とする。

(1) $\displaystyle\int_{C_1} f(z)\,dz$ を求めよ。

(2) $\displaystyle\int_{C_n} f(z)\,dz$ を求めよ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{C_n} f(z)\,dz$ を求めよ。



4. $\displaystyle\int_C \frac{Log\,(1+z)}{z^3}\,dz$, C : $|z|=\dfrac{1}{2}$

を求める次の計算の (　) に入る最も適切な値を解答用紙にかけ。ただし、答のみ。なお、Log は対数関数の主値である。

$f(z)=\dfrac{Log\,(1+z)}{z^3}$ とおけば $\displaystyle\lim_{z\to 0} z^{(1)} f(z)=(\ 2\ )\neq 0$ だから $z=0$ は関数 $f(z)$ の C 内にある

(3) 位の極である。よって、$Res\,[f,0]=(\ 4\ )$ $\therefore \displaystyle\int_C \frac{Log\,(1+z)}{z^3}\,dz=(\ 5\ )$

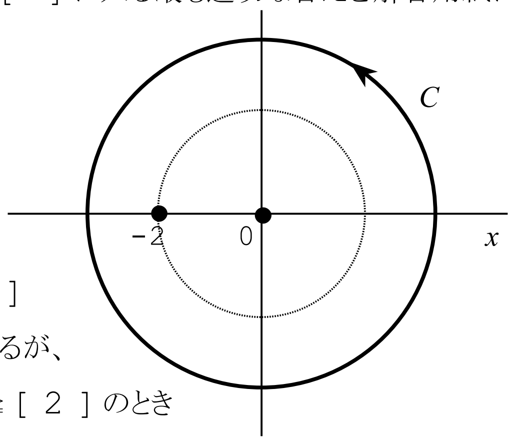
5. 次の問いに答えよ。

(1) 関数 $\dfrac{1}{z^3\,(z+2)}$ の $z=0$ を中心とした $|z|>2$ のときの $Laurent$ 展開を、等比級数の和の公式を用いて求めよ。

(2) 関数 $\dfrac{1}{z^3\,(z+2)}$ の $z=0$ を中心とした $|z|>2$ のときの $Laurent$ 展開を $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ とする。C を円 $|z|=2$ をその内部に含む任意の単一閉曲線とすれば (例えば C : $|z|=3$)

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z^{n+1}}\,dz,\quad f(z)=\frac{1}{z^3\,(z+2)}$$

で求めることができる。この計算を行った次の論理の [　] に入る最も適切な答えを解答用紙にかけ。ただし、答のみ。



$a_n=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C \frac{1}{z^{n+4}\,(z+2)}\,dz$ だから、

$g\,(z)=\dfrac{1}{z^{n+4}\,(z+2)}$ とおく。$z=-2$ は C の内部にある g の極だから留数を求めると $Res\,[g,-2]=[\ 1\ ]$

$z=0$ は $n\geqq[\ 2\ ]$ のとき C の内部にある g の極であるが、

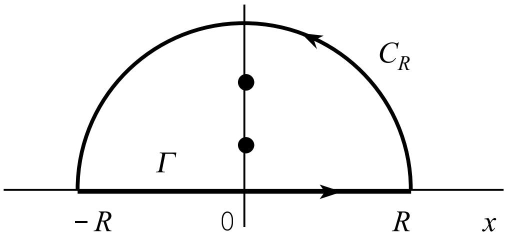
$n\leqq[\ 3\ ]$ のときは g の特異点でなくなる。そこで $n\geqq[\ 2\ ]$ のとき

留数を求めると $Res\,[g,0]=[\ 4\ ]$ となる。従って

$$a_n=\begin{cases}[\ 5\ ] & (n\geqq[\ 2\ ])\\ [\ 6\ ] & (n\leqq[\ 3\ ])\end{cases}$$

6． $\displaystyle\int_C \frac{e^{iz}}{z^4+5z^2+4}dz$， $C:\Gamma+C_R$ ただし、$\Gamma:-R\leqq x\leqq R$， $C_R:z=Re^{i\theta}$ $(0\leqq\theta\leqq\pi)$

を求めよ。ただし、$R>3$ とする。



○ 参考

$f(x)=x^2$ $(-1\leqq x\leqq 1)$，　$f(x+2)=f(x)$ の *Fourier* 級数は

$$f(x)=\frac{1}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2\pi^2}\cos n\pi x$$