2013年度後期中間試験問題・応用数学A（E4）

必要ならば以下のことを用いてよい。

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx+b\sin bx)\quad(a\neq 0,\ b\neq 0)$$

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx-b\cos bx)\quad(a\neq 0,\ b\neq 0)$$

$$F\left[e^{-ax^2}\right]=\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,e^{-\frac{u^2}{4a}}\quad(a>0)$$

$$e^{-\frac{x^2}{a}}*e^{-\frac{x^2}{b}}=\sqrt{\frac{\pi ab}{a+b}}\,e^{-\frac{x^2}{a+b}}\quad(a>0,\ b>0)$$

$$F\left[f(x)\right](u)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-iux}dx,\quad F^{-1}\left[F(u)\right](x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(u)e^{iux}du$$

１． 次の問いに答えよ。ただし、答のみ。

（1） $F\left[e^{-\frac{x^2}{8}}\right](u)$ を求めよ。　　（2） $F\left[e^{-\frac{x^2}{5}}*e^{-\frac{x^2}{8}}\right](u)$ を求めよ。

（3） $e^{-\frac{x^2}{5}}*e^{-\frac{x^2}{8}}$ を求めよ。

２． $u=u(x,y)=-y$ とする。次の問いに答えよ。

（1） u は調和関数であることを示せ。

（2） u を実部とする正則関数 $f(z)$ を求めよ。ただし、$z=x+iy$

３． $a>0$：定数とするとき、関数 $f(x)$ について、$x\geqq 0$ のとき $f(x)=e^{-ax}$ とする。このとき、次の問いに答えよ。ただし、答のみ。

（1） $x<0$ のとき、$f(x)=0$ と定義したときの $F\left[f(x)\right](u)$ を求めよ。

（2） $f(x)$ が奇関数となるように $x<0$ における値を定義するとき、$f(x)$ の *Fourier* 正弦変換を求めよ。ただし、$f(x)$ の正弦変換とは $2\int_0^{\infty}f(x)\sin ux\,dx$ と定義する。

（3） （2）の場合の $F\left[f(x)\right]$ を求めよ。

（4） $f(x)$ が偶関数となるように $x<0$ における値を定義するとき、$f(x)$ の *Fourier* 余弦変換を求めよ。ただし、$f(x)$ の余弦変換とは $2\int_0^{\infty}f(x)\cos ux\,dx$ と定義する。

４． 上の問題３（1）の $F\left[f(x)\right](u)$ を $F(u)$ と表す。このとき、次の問いに答えよ。

（1） $F^{-1}\left[F(u)\right]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\{g(u,x)+ih(u,x)\}du$ （実部と虚部にわける）としたとき $g(u,x)$ と $h(u,x)$ を求めよ。

（2） 定積分 $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos 2x + x \sin 2x}{x^2+1}\,dx$ を求めよ。

5．次の文章は、複素関数 $w=2z+i$ によって、円 $|z-1|=2$ はどのような図形に移るか求めたものである。括弧に入るもっとも適切な答えを解答用紙にかけ。ただし、答のみ。なお、（ 1 ），（ 2 ），（ 4 ）は u，v の式、［ 5 ］は数値が入る。

$z=x+iy$，$w=u+iv$ とする。$w=2z+i$ を z について解くと、$x=$（ 1 ），$y=$（ 2 ）となる。また円 $|z-1|=2$ は $|z-1|^2=4$ だから、これを x，y の式で表せば（ 3 ）となる。これに $x=$（ 1 ），$y=$（ 2 ）を代入すると（ 4 ）$=16$ となる。つまり、円 $|w-$（［ 5 ］）$|=4$ に移される。

6．条件 $f(x,0)=e^{-x^2}$ を満たす $f(x,t)$ の偏微分方程式 $\dfrac{\partial f}{\partial t}=4\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ $(-\infty<x<\infty,\ t>0)$ について、次の文章の括弧に入るもっとも適切な答えを解答用紙にかけ。ただし、答のみ。

f の変数 x に関する *Fourier* 変換を $F=F(u,t)$ と表す。即ち、

$F(u,t)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x,t)\,e^{-iux}dx$，偏微分方程式の両辺の変数 x に関する *Fourier* 変換をとれば

$\dfrac{\partial F}{\partial t}=4\mathcal{F}\left[\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right]=$（ 1 ）$F$，これを変数 t に関する１階常微分方程式として解けば、

$F(u,t)=\Phi(u)$（ 2 ） ただし、$\Phi(u)=\mathcal{F}\left[e^{-x^2}\right]=$（ 3 ） $\therefore F(u,t)=$（ 4 ）

従って、$f(x,t)=\mathcal{F}^{-1}$［（ 4 ）］$=$（ 5 ）

7．次の値を求めよ。ただし、答のみ。

（1） $\cos(\pi-9i)$ （2） $\sin(3\pi i)$ （3） $e^{4+5\pi i}$

8．次の複素関数を微分せよ。ただし、答のみ。

注意：（1），（2）は合成関数の微分法を用いよ。展開した解答は正しくても点を与えない。

（4）は逆に展開し<u>同類項もまとめ</u>、z の降べきの順に並べて答えよ。

（1） $w=\left(z^2+iz+1\right)^5$ （2） $w=e^{\left(z^2+i\right)^5}$ （3） $w=\dfrac{z-i}{z+i}$

（4） $w=\left(z^2+i\right)\left(z^2-3iz+1\right)$ （5） $w=\cos\left(\dfrac{z}{z+1}\right)$

9．複素関数 $w=f(z)=e^z$ と z 平面上の曲線と直線 C_1：$z_1(t)=t-it^2$，C_2：$z_2(t)=t+it$ について、次の問いに答えよ。ただし、答のみ。

（1） C_1，C_2 の $t=0$ における接線の方向ベクトルを表す複素数をそれぞれ１つずつ求めよ。

（2） C_1 の写像 f による像を K_1 とする。K_1：$w_1(t)=u_1(t)+iv_1(t)$ とするとき、$u_1(t)$，$v_1(t)$ を求めよ。

（3） K_1 の $t=0$ における接線の方向ベクトルを表す複素数を１つ求めよ。

（4） C_2 の写像 f による像を K_2 とする。K_2：$w_2(t)=u_2(t)+i\,v_2(t)$ とするとき、
$u_2(t)$，$v_2(t)$ を求めよ。

（5） K_2 の $t=0$ における接線の方向ベクトルを表す複素数を１つ求めよ。

（6） $t=0$ における C_1 の接線と C_2 の接線のなす角 θ を求めよ。向きは C_1 から C_2 へ向かう向きで、$-\pi<\theta\leqq\pi$ とする。

（7） $t=0$ における K_1 の接線と K_2 の接線のなす角 ϕ を求めよ。向きは K_1 から K_2 へ向かう向きで、$-\pi<\phi\leqq\pi$ とする。

１０． $w=f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y)$ （$z=x+i\,y$）は正則とする。z を極形式で表して $z=re^{i\theta}$ とすれば、$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ となるから、これらを u，v に代入して
$U(r,\theta)=u(r\cos\theta, r\sin\theta)$，$V(r,\theta)=v(r\cos\theta, r\sin\theta)$ とする。このとき、次の論理の括弧に入るもっとも適切な答えを解答用紙にかけ。ただし、答のみ。なお、［　］は行列、（　）は文字式が入る。注意： x_r などは計算したものを答えよ。また、u，v は全微分可能。

U に合成関数の微分法を用いて整理し、これを行列を用いて表せば、$\begin{pmatrix} U_r \\ U_\theta \end{pmatrix}=[\ 1\ ]\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}$ … ①

同様にして、$\begin{pmatrix} V_r \\ V_\theta \end{pmatrix}=[\ 2\ ]\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$ … ②　u，v の $Cauchy-Riemann$ の関係式より

$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}=[\ 3\ ]\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}$　これを②に代入すれば、$\begin{pmatrix} V_r \\ V_\theta \end{pmatrix}=[\ 4\ ]\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}$　［ ４ ］の逆行列を用いて

$\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}=[\ 5\ ]\begin{pmatrix} V_r \\ V_\theta \end{pmatrix}$　これを①に代入すれば、$\begin{pmatrix} U_r \\ U_\theta \end{pmatrix}=[\ 6\ ]\begin{pmatrix} V_r \\ V_\theta \end{pmatrix}$

$\therefore\ U_r=(\ 7\ )\,V_\theta$，$U_\theta=(\ 8\ )\,V_r$　これが極形式のときの $Cauchy-Riemann$ の関係式である。