2013年度前期末試験問題・応数A（E4）

1．$f(x)=|\sin x|$ の $Fourier$ 級数を求める以下の文章のかっこに入るもっとも適切な答えを解答用紙にかけ。ただし、答のみ。

注意： 答えに文字 l を用いないこと。また、(1) (2) (3) (11) は数値で答えよ。

$f(x)$ の周期を $2l$ $(l>0)$ とすれば、$l=$（ 1 ）である。（ただし、この場合の周期とは基本周期のことで、l は最小のものを考えよ。この指示に従わない解答は点を与えない）$Fourier$ 級数の定数項を c_0、余弦、正弦の係数をそれぞれ a_n, b_n とする。ただし、n は自然数。$c_0=$（ 2 ）, $b_n=$（ 3 ）となる。

$a_n=\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l}|\sin x|(\ 4\ )\,dx=\dfrac{2}{l}\int_{0}^{l}\sin x(\ 4\ )\,dx$ 積を和に直す公式を用いて、

上式 $=\dfrac{2}{l}\displaystyle\int_{0}^{l}\dfrac{\sin(\ 5\ )x-\sin(\ 6\ )x}{2}dx$ （（ 5 ）,（ 6 ）は正）

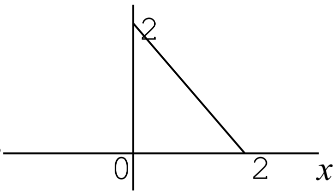
$=\dfrac{1}{l}\left[(\ 7\ )\right]_0^l$ （（ 7 ）は $\sin(\ 5\ )x-\sin(\ 6\ )x$ の原始関数）

$=-\dfrac{4}{\pi}(\ 8\ )$ 以上により、$f(x)$ の $Fourier$ 級数は、$f(x)=$（ 9 ）となる。この結果と

$Fourier$ の収束定理を用いて、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{4n^2-1}$ の値を求める。$x=\dfrac{\pi}{2}$ を代入すると（ 9 ）は

（ 10 ）となる。一方、$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$ だから、結局、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{4n^2-1}=(\ 11\ )$

2．周期関数 $f(x)$ の周期は 4 で、$0\leqq x\leqq 2$ のとき、$f(x)=2-x$ とする。次の各場合において $f(x)$ の $Fourier$ 級数を求めよ。



（1） $f(x)=0$ $(-2\leqq x<0)$ であるとき。

（2） $f(x)=-f(-x)$ $(-2\leqq x<0)$, $f(0)=0$ であるとき。

（3） $f(x)=f(-x)$ $(-2\leqq x<0)$ であるとき。

3．上の問題 2 の結果を用いて、次の級数の値を求めよ。

（1） $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$ （2） $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$

4．$f(x)=\begin{cases}-x & (-\pi\leqq x<0)\\ 0 & (0\leqq x<\pi)\end{cases}$, $f(x+2\pi)=f(x)$ の複素 $Fourier$ 級数を求めよ。

5．偏微分方程式 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ $(0<x<1,\ 0<y<1)$ … ①

の解 $u(x,y)$ で、次の条件を満たすものを求めようと思う。

$u(x,0)=u(x,1)=0$ … ②

$u(0,y)=0$, $u(1,y)=y(1-y)$ … ③

次の問いに答えよ。

(1) 次の文章の [ ] に入るもっとも適切な答えを解答欄に書け。ただし、答のみ。

$u=X(x)Y(y)$ とし①に代入すると [1] $=\dfrac{X''}{X}=\lambda$ (λ は定数), X は恒等的には 0 でないから、条件②から $Y(0)=Y([\ 2\ ])=0$ となる。[1] $=\lambda$ の解でこの条件を満たす恒等的には 0 でない解は $\lambda>0$ のとき存在し、$Y=C$ [3] ただし、C は 0 でない任意定数で、n は任意の自然数である。このとき、$X''=\lambda X$ の一般解は $X=D\,cosh$ [4] $+E$ [5] ただし、D, E は少なくとも一方が 0 でない任意定数である。これらの n に関する線形結合も形式的に②の条件を満たす①の解であるから、任意定数をまとめて表せば、

$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n\,cosh\,[\ 6\ ]+D_n[\ 7\ ]\right)[\ 8\ ]$ となる。

(注意: [8] は任意定数含まず)

(2) (1) の続きを解答し、$u(x,y)$ を求めよ。

(注意: あくまで (1) の続きとして解答をかけ。つまり、

$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n\,cosh\,[\ 6\ ]+D_n[\ 7\ ]\right)[\ 8\ ]$ からスタートせよ。白い問題集の答えを意味もわからず丸暗記し、それを解答するものがいる。問題集の答えと定数を表す文字も違うし、(1) の解答では双曲線関数を使っており、これは白い問題集の答えと表現が違う。(1) の続きとしての解答でない場合、大きく減点するか、点を与えない)

6. 周期 2π の周期関数 $f(x)$ の *Fourier* 係数を c_0, a_n, b_n とするとき、次の計算のかっこに入るもっとも適切な答えを答案用紙にかけ。ただし、答のみ。

注意: [ ] は x の関数、( ) は *Fourier* 係数のみの式である。

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left(c_0+\sum_{n=1}^{N}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)\right)^2dx$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\left(c_0^2+2c_0\sum_{n=1}^{N}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)+\left(\sum_{n=1}^{N}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)\right)^2\right)dx$$

$$=2\pi c_0^2+\int_{-\pi}^{\pi}[\ 1\ ]^2dx \qquad \because \int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx=0$$

$$=2\pi c_0^2+\pi\sum_{n=1}^{N}(\ 2\ ) \qquad \because \int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cos nx\,dx=0,\ \int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx\,dx=\begin{cases}0 & (m\neq n)\\ \pi & (m=n)\end{cases},$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nx\,dx=\begin{cases}0 & (m\neq n)\\ \pi & (m=n)\end{cases}$$ 従って、

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x)-\left(c_0+\sum_{n=1}^{N}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)\right)\right)^2dx$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}(f(x))^2dx-2\int_{-\pi}^{\pi}[\ 3\ ]\,dx+\int_{-\pi}^{\pi}\left(c_0+\sum_{n=1}^{N}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)\right)^2dx$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}(f(x))^2dx-\pi(\ 4\ )$$