2013年度前期中間試験問題・応用数学A（E4）

必要なら次の定義、公式を用いてよい。

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx-b\cos bx)$$

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx+b\sin bx)$$

$$\Gamma(p)=\int_0^\infty e^{-x}x^{p-1}dx\quad(p>0)\,,\quad \int_0^\infty e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

１．次の関数の$Laplace$変換を求めよ。ただし、答のみ。

(1) $f(t)=\begin{cases} t & (0<t\leqq 1)\\ 2-t & (1<t\leqq 2)\\ 0 & (t>2)\end{cases}$　(2) $f(t)=\begin{cases} 2 & (0<t\leqq 1)\\ -1 & (1<t\leqq 3)\\ 1 & (t>3)\end{cases}$

(3) e^t　(4) te^t　(5) $U(t-1)e^{t-1}$　(6) $\displaystyle\int_0^t e^\tau d\tau$　(7) $\dfrac{e^t-1}{t}$

(8) e^t*e^t　(9) t^2　(10) $t^2\sin 2t$　(11) $U(t-3)(t-3)^2$

(12) $t*t^2$　(13) $t*\sin t$　(14) $\dfrac{\sin t}{t}$

２．次の関数の逆$Laplace$変換を求めよ。ただし、答のみ。

(1) $\dfrac{s}{s^2+9}$　(2) $\dfrac{s+2}{(s+2)^2+9}$　(3) $\dfrac{(s+2)e^{-s}}{(s+2)^2+9}$　(4) $\dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{s}{s^2+9}\right)$

(5) $\dfrac{1}{(s-2)^3}$　(6) $\dfrac{s}{(s-2)^3}$　(7) $\dfrac{1}{s^2+2s+2}$　(8) $\dfrac{s}{s^2+2s+2}$

(9) $\dfrac{1}{s(s-2)^3}$　(10) 1　(11) $\dfrac{1}{s^2(s-2)}$　(12) $\dfrac{1}{\sqrt{s}}$

３．$F(s)=\dfrac{1}{s^3-1}$ の逆$Laplace$変換について、次の各問いに答えよ。

(1) $\dfrac{1}{s^3-1}=\dfrac{1}{(s-1)(s^2+s+1)}=\dfrac{A}{s-1}+\dfrac{Bs+C}{s^2+s+1}$ と部分分数に分解して逆$Laplace$変換を求めよ。

(2) $\dfrac{1}{s^3-1}=\dfrac{1}{s-1}\times\dfrac{1}{s^2+s+1}$ と考えて畳込みと$Laplace$変換の関係を用いて逆$Laplace$変換を求めよ。

４．$\varepsilon>0$ に対して $\phi_\varepsilon(t)=\dfrac{1}{\varepsilon}(1-U(t-\varepsilon))$ $(t>0)$ とする。この関数を入力として線形システム

$y''+\omega^2y=\phi_\varepsilon(t)$，$y(0)=y'(0)=0$　(ω は正の定数）を考える。次の問いに答えよ。

（1） 出力 $y_\varepsilon(t)$ を $Laplace$ 変換を用いて求めよ。

（2） $t>0$ のとき、$\lim_{\varepsilon \to +0} y_\varepsilon(t)$ を上の（1）の結果から極限を計算して求めよ。つまり「入力がデルタ関数のときの出力は、伝達関数の逆 $Laplace$ 変換である」ということを用いてはいけない。

5． つぎの文章のかっこに入るもっとも適切な答を解答欄にかけ。ただし、**答のみ**。

線形システム $y''-6y'+8y=x(t)$, $y(0)=y'(0)=0$ を考える。このシステムの伝達関数 $H(s)$ は $H(s)=$（ 1 ）であり、この逆 $Laplace$ 変換を $h(t)$ と表せば、$h(t)=$（ 2 ）となる。（ 2 ）を双曲線関数を用いて表せば、$h(t)=$（ 3 ）となる。デルタ関数 $\delta(t)$ に対して $\pounds\left[\delta(t)\right]=$（ 4 ）だから、入力がデルタ関数のときのこのシステムの出力は（ 5 ）となる。任意の入力 $x(t)$ に対する出力は、畳込みを用いると

$$y(t)=\int_0^{(6)} (\ 7\ )\, x(\tau)\, d\tau=\int_0^{(6)} (\ 8\ )\, x(t-\tau)\, d\tau$$ となる。

（（ 7 ），（ 8 ）は具体的な式を書くこと）

$x(t)=e^{3t}$ のときの出力は $y(t)=\int_0^{(6)} (\ 8\ )(\ 9\ )\, d\tau=(\ 10\ )$ となる。