2015年度学年末試験問題・応用数学（D4）

注意：とくに断らない限り，$\boxed{\text{数値}}$ は $a+ib$ （a，b：実数）の形で答えよ。なお k が実数ならば $k(a+ib)$ や $\dfrac{a+ib}{k}$ でも可とする。例えば $\dfrac{2}{i}$ は $-2i$ とせよ。

１．次の複素積分の値を求めよ。ただし，$\boxed{\text{答のみ。}}$ (11点)

（1） $\displaystyle\int_C z\,dz$， $C: z=1+it\ (0\leqq t\leqq 2)$

（2） $\displaystyle\int_C \cos z\,dz$， C： π から i に至る任意の曲線

（3） $\displaystyle\int_C \frac{1}{z^2+9}\,dz$， $C: z=e^{it}\ \left(\frac{\pi}{2}\leqq t\leqq\frac{3\pi}{2}\right)$

（4） $\displaystyle\int_C \frac{1}{z-2}\,dz$， C： ３点 $3, i, -i$ で作られる三角形の周 (正の向き)

（5） $\displaystyle\int_C \frac{e^z}{z-\pi}\,dz$， $C: |z|=4$

２．第 n 項が次の式で表される数列の収束，発散を調べ，収束するときは極限値を求めよ。ただし，$\boxed{\text{答のみ。}}$ (8点)

（1） $\dfrac{n+i}{2+in}$　（2） $-in$　（3） $\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{3}\right)^n$　（4） $exp\left(\dfrac{n\pi}{2}i\right)$

３．次の値を求めよ。ただし，$\boxed{\text{答のみ。}}$ (9点)

（1） [1] $Res\left[\dfrac{\cos z}{z(z-1)}, 0\right]$　[2] $Res\left[\dfrac{\cos z}{z(z-1)}, 1\right]$

（2） [1] $Res\left[\dfrac{1}{z^3(z+1)}, 0\right]$　[2] $Res\left[\dfrac{1}{z^3(z+1)}, -1\right]$

４．次の計算の（　）に入る最も適切な答えを解答用紙にかけ。ただし，$\boxed{\text{答のみ。}}$ (17点)

関数 $f(z)=\dfrac{Log(1+z)}{z^3}$ と円 $C: |z|=\dfrac{1}{2}$ について $\displaystyle\int_C f(z)\,dz$ を計算する。

$\displaystyle\lim_{z\to0} z^2 f(z)=$（ 1 ）だから点 0 は $f(z)$ の（ 2 ）位の極となる。$Res[f, 0]=\displaystyle\lim_{z\to0}\frac{(\ 3\ )}{z^2(1+z)}$

ここで $\displaystyle\lim_{z\to0}\frac{(\ 3\ )}{z^2}=$（ 4 ）だから，$Res[f, 0]=$（ 5 ）となる。従って $\displaystyle\int_C f(z)\,dz=$（ 6 ）

となる。なお $Log(1+z)$ の $|z|<1$ における 0 を中心とした $Taylor$ 展開が

$Log\,(1+z)=\sum_{n=1}^{\infty}$ (7) だから $f(z)$ の $0<|z|<1$ における 0 を中心とした *Laurent* 展開は

$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}$ (8) = (9) + $F(z)$ となる。ただし，$F(z)$ は正則部。この級数の $z^{(10)}$ の係数が

$Res\,[f,\,0]$ だから上の結果と一致する。

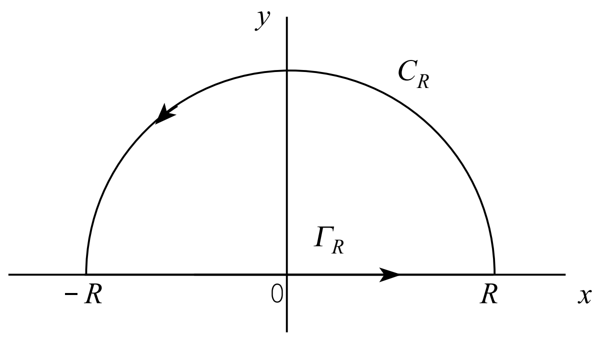
5．関数 $f(z)=\dfrac{1}{1-z}$ の点 $z=-2i$ を中心とした *Taylor* 展開を求める次の計算の（　）に入る最も適切な答えを解答用紙にかけ。ただし，$\boxed{\text{答のみ。}}$ (8点)

$u=z+2i$ と置き $f(z)$ を u の式で表すと $f(z)=\dfrac{1}{1+2i}\,\dfrac{1}{1-(\;1\;)}$ となる。従って $|u|<(\;2\;)$ のとき，$f(z)=\dfrac{1}{1+2i}\,\dfrac{1}{1-(\;1\;)}=\sum_{n=0}^{\infty}(\;3\;)=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(\;4\;)}{5^{n+1}}$ となる。

6．関数 $f(z)=\dfrac{z\,e^{iz}}{\left(z^2+2\right)^2}$ と単純閉曲線 $C=C_R+\Gamma_R$，$C_R: z=Re^{it}\ \left(0\leqq t\leqq\pi\right)$，$\Gamma_R: z=t\ \left(-R\leqq t\leqq R\right)$ について，次の各問いに答えよ。ただし，$R\geqq 2$ とする。(17点)

(1) $\displaystyle\int_C f(z)\,dz$ の値を求めよ。

(2) $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)\,dz=0$ を証明する次の論理の [　] に入る最も適切な答えを下の解答群から選び，その番号を解答用紙にかけ。ただし，$\boxed{\text{答のみ。}}$



注意：この問題は無解答なら 0 点であるが，誤答は −2 点とする。

C_R 上で $\left|e^{iz}\right|=e^{[\;1\;]}\leqq 1\ \left(\because\ 0\leqq t\leqq\pi\right)$，$\left|\dfrac{z}{\left(z^2+2\right)^2}\right|\leqq\dfrac{R}{[\;2\;]}\leqq[\;3\;]\ \left(\because\ R\geqq 2\right)$

となるから，$0\leqq\left|\displaystyle\int_{C_R} f(z)\,dz\right|\leqq\displaystyle\int_0^{\pi}[\;4\;]\,dt=[\;5\;]\to 0\ \ (R\to\infty)$

- 解答群

① $\dfrac{2\pi}{R^2}$	② $\left(R^2-2\right)^2$	③ 0	④ $-R$	⑤ $R\cos t$
⑥ $\dfrac{2}{R^3}$	⑦ $\dfrac{4}{R^2}$	⑧ $\dfrac{1}{R^3}$	⑨ $\dfrac{\pi}{R^2}$	⑩ $-R\sin t$
⑪ $\left(R^2+2\right)^2$	⑫ $\dfrac{1}{R^4}$	⑬ $\dfrac{2}{R^2}$	⑭ $\dfrac{4}{R^3}$	⑮ $\dfrac{4\pi}{R^2}$

(3) 実積分 $\displaystyle\int_0^{\infty}\dfrac{x\sin x}{\left(x^2+2\right)^2}\,dx$ の値を求めよ。ただし，$\boxed{\text{答のみ。}}$

７．関数 $f(z)=\dfrac{1}{z^4-z^3+2z^2-4z-8}$ の４つの特異点を $\alpha_1, \alpha_2, \beta, \alpha_3$ とする。ただし，

$|\alpha_1|<|\alpha_2|=|\beta|=|\alpha_3|$ で，$\mathrm{Im}(\alpha_2)=0, \mathrm{Im}(\beta)<0$ とする。このとき次の各問いに答えよ。

(27点)

（1） 次の留数の値を求めよ。ただし，$\boxed{\text{答のみ。}}$

［1］ $Res[f, \alpha_1]$　　［2］ $Res[f, \alpha_2]$　　［3］ $Res[f, \beta]$　　［4］ $Res[f, \alpha_3]$

（2） $R>0$ に対して点 β を中心とした円 $C_R: |z-\beta|=R$ を考える。このとき，$\displaystyle\int_{C_R} f(z)\,dz$ の値を求めよ。ただし，$f(z)$ の特異点がこの円周上にある場合は考えないものとする。

（3） 環状領域 $0<|z-\beta|<|\alpha_1-\beta|$ における点 β を中心とした $f(z)$ の $Laurent$ 級数を $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-\beta)^n$ とするとき，定数項 a_0 を求めよ。

８．$\alpha_n=\dfrac{\prod_{k=1}^{n-1}(a-kb)}{n!}=\dfrac{(a-b)(a-2b)\cdots\{a-(n-1)b\}}{n!}$ $(n\geqq 2), \alpha_1=1$ とするとき，べき級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n z^n$ の収束半径を求めよ。ただし，a, b は定数で，$b\neq 0$ とする。(3点)