2015年度後期中間試験問題・応用数学(D4)

1．$z^6=-1$ を解く次の計算の（　）に入る最も適切な答えを解答用紙にかけ。ただし，$\boxed{\text{答のみ。}}$ (10点)

$z=re^{i\theta}$ $(r>0)$ とおく。-1 を極形式で表すと $e^{i\alpha_k}$，$\alpha_k=((\ 1\ ))\pi$ となる。$(k\in \mathbb{Z})$

$z^6=r^6e^{(\ 2\ )}$ だから，$r=1$，$\theta=\theta_k=\dfrac{\alpha_k}{(\ 3\ )}$ $(k=0,1,2,\cdots,5)$ $\therefore\ \theta_k=((\ 4\ ))\pi$

ただし，$\theta_k>0$ とする。$z_k=e^{i\theta_k}$ と表せば，$z_0=(\ 5\ )$，$z_1=(\ 6\ )$，$z_2=(\ 7\ )$，$z_3=(\ 8\ )$，$z_4=(\ 9\ )$，$z_5=(\ 10\ )$

（注意：(5)～(10) は極形式の形や三角関数の値を求めていない解答などは不可）

2．次の複素数について [1] 実部　[2] 虚部　[3] 絶対値　[4] 共役複素数

を求めよ。ただし，$\boxed{\text{答のみ。}}$ (8点)

(1)　$(2-3i)(2+i)$　　(2)　$\dfrac{2+i}{1-3i}$　（注意：[4] は $x+yi$ の形で答えよ。x,y：実数）

3．次の計算の（　）に入る最も適切な答えを解答用紙にかけ。ただし，$\boxed{\text{答のみ。}}$ (9点)

$z=x+iy$ （x,y：実数）とすれば $z^2=(\ 1\ )+i(\ 2\ )$ $\therefore\ Re(z^2)=(\ 3\ )$

一方，$Re(z)=(\ 4\ )$，$Im(z)=(\ 5\ )$ だから，$Re(z^2)$ を $Re(z)$，$Im(z)$ という記号で表すと

$Re(z^2)=(\ 6\ )$，また $\dfrac{1}{z}=(\ 7\ )+i((\ 8\ ))$ だから $Im\left(\dfrac{1}{z}\right)$ を $Re(z)$，$Im(z)$ という記号で

表すと $Im\left(\dfrac{1}{z}\right)=(\ 9\ )$ となる。

4．$f(x)=exp(-|x|)$ $(-\infty<x<\infty)$ について，次の各問いに答えよ。なお，$exp(x)=e^x$ である。ただし，$\boxed{\text{答のみ。}}$ (9点)

(1)　$f(x)$ の *Fourier* 変換 $\mathrm{F}[f(x)](u)$ を求める次の計算の [　] に入る最も適切な答えを解答用紙にかけ。

$f(x)$ は偶関数だから $\mathrm{F}[f(x)](u)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}e^{-|x|}e^{-iux}dx=2\int_0^{\infty}e^{-x}[\ 1\ ]dx$

$=2[[\ 2\ ]]_0^{\infty}=[\ 3\ ]$

(2)　$a>0$ が定数のとき，$\mathrm{F}[exp(-a|x|)](u)$ を求めよ。

(3)　$\mathrm{F}[exp(-|x|)*exp(-2|x|)](u)$ を求めよ。なお，$f*g$ は畳込みである。

(4)　$exp(-|x|)*exp(-2|x|)$ を求めよ。

5．次の計算の（　）に入る最も適切な答えを解答用紙にかけ。ただし，$\boxed{\text{答のみ。}}$ (16点)

a を正定数とする。$f(x)=exp(-ax^2)$ とおけば，$f'(x)=(\ 1\ )f(x)$ … ①

$F(u)=\mathrm{F}[f(x)](u)$ と表すとき，①の両辺の $Fourier$ 変換を計算すると，左辺＝(2) $F(u)$

右辺＝(3) $\dfrac{dF}{du}$ $\therefore$ $\dfrac{dF}{du}=$ (4) $F(u)$ となる。これを解いて

$F(u)=C$ (5) (C : 任意定数)

$C=F(0)=\int_{-\infty}^{\infty}$ (6) $dx=$ (7) $\int_0^{\infty} exp\left(-t^2\right)dt=$ (8) $\therefore F(u)=$ (9)

さらに b も正定数とすれば

$\mathrm{F}\left[exp\left(-ax^2\right)*exp\left(-bx^2\right)\right](u)=$ (10) $exp\left(\text{(11)}u^2\right)$

$=$ (12) $\sqrt{\dfrac{\pi}{\text{(13)}}}\,exp\left(-\dfrac{u^2}{4(\text{(13)})}\right)$ $\therefore exp\left(-ax^2\right)*exp\left(-bx^2\right)=$ (14)

6．偏微分方程式 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2}=2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ $(-\infty<x<\infty,\ t>0)$, $f=f(x,t)$ … ①

について，次の各問いに答えよ。ただし， (1)，(3) は答のみ。 (12点)

(1) $f(x,t)$ の x についての $Fourier$ 変換を $F(u,t)$ とおくとき，F の満たす方程式を求めよ。

(2) $F(u,t)=C_1(u)\,exp\left(i\sqrt{2}\,u\,t\right)+C_2(u)\,exp\left(-i\sqrt{2}\,u\,t\right)$ と表されることを示せ。
ただし，$C_1(u)$，$C_2(u)$ は任意の関数である。

(3) 次の計算の [ ] に入る最も適切な答えを解答用紙にかけ。

$\mathrm{F}^{-1}\left[C_1(u)\right]=p(x)$，$\mathrm{F}^{-1}\left[C_2(u)\right]=q(x)$ とすれば

$\mathrm{F}^{-1}\left[C_1(u)\,exp\left(i\sqrt{2}\,u\,t\right)\right]=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}C_1(u)\,exp(i\,[\ 1\ ])\,du=[\ 2\ ]$

$\mathrm{F}^{-1}\left[C_2(u)\,exp\left(-i\sqrt{2}\,u\,t\right)\right]=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}C_2(u)\,exp(i\,[\ 3\ ])\,du=[\ 4\ ]$

$\therefore f(x,t)=[\ 5\ ]$

7．$u=u(x,y)=e^x\cos y$ (x,y : 実数)について，次の各問いに答えよ。(13点)

(1) u は調和関数であることを示せ。

(2) u を実部とする正則関数 $f(z)$ を求めよ。またこのとき，$f'(z)$ を求めよ。ただし，$z=x+iy$ とする。

8．次の複素数を $x+iy$ (x,y : 実数)の形で表せ。ただし， (1) は答のみ。 (8点)

(1) $(-2)^i$ (2) $\sin^{-1}(3i)$

9．$f(z)=\begin{cases}\dfrac{x^4(i-2)-y^4(1+2i)}{x^3+y^3} & (z\neq 0)\\ 0 & (z=0)\end{cases}$ $(z=x+iy)$ で定義される関数について，次の

計算の [ ] に入る最も適切な答えを解答用紙にかけ。ただし， 答のみ。 (17点)

注意：［ 7 ］は言葉で，無解答ならば 0 点であるが誤答は −2 点とする。

$f(z)$ の実部を $u=u(x,y)$，虚部を $v=v(x,y)$ とすれば，$u=$［ 1 ］，$v=$［ 2 ］となるから
$u_x(0,0)=$［ 3 ］，$u_y(0,0)=$［ 4 ］，$v_x(0,0)=$［ 5 ］，$v_y(0,0)=$［ 6 ］となるからコーシー・リーマンの関係式が［ 7 ］。$(h,k)\neq(0,0)$ に対して

$$\varepsilon(h,k)=u(h,k)-u_x(0,0)\,h-u_y(0,0)\,k=\frac{[\ 8\ ]}{h^3+k^3}$$

$$\delta(h,k)=v(h,k)-v_x(0,0)\,h-v_y(0,0)\,k=\frac{[\ 9\ ]}{h^3+k^3}$$

直線 $k=h$ $(h\neq0)$ 上では $\dfrac{\varepsilon(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}=3[\ 10\ ]$，$\dfrac{\delta(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}=\dfrac{h}{[\ 11\ ]}$

(［ 10 ］,［ 11 ］は h の式)

$$\therefore\ \lim_{h\to\pm0}3[\ 10\ ]=[\ 12\ ],\quad \lim_{h\to\pm0}\frac{h}{[\ 11\ ]}=[\ 13\ ]\quad(\text{複号同順})$$

以上より u, v は原点で全微分可能でないから，$f(z)$ は $z=0$ で微分不可能である。