2015年度夏季休業明け試験問題・応用数学(D4)

全体の注意：とくに断らない限り $y=y(x)$, $y'=\dfrac{dy}{dx}$, $y''=\dfrac{d^2y}{dx^2}$ とする。

１．微分方程式 $y''-6y'+9y=x^2e^{3x}$ … ① の解法に関する以下の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙にかけ。ただし, $\boxed{\text{答のみ。}}$ (10点)

(ここから) $y''-6y'+9y=0$ … ②を解くと, $y=(\ 1\ )$ $\left(C_1, C_2 : \text{任意定数}\right)$となる。次に①の1つの解 η を演算子法を用いて求める。$\eta=\dfrac{1}{(D-3)^2}\left(x^2e^{3x}\right)=(\ 2\ )\dfrac{1}{(\ 3\ )}((\ 4\ ))=(\ 5\ )$

以上より①の一般解は $y=(\ 6\ )$　(ここまで)

２．微分方程式 $y'-2x^2e^xy+e^xy^2=2x-x^4e^x$ … ① の解法に関する以下の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙にかけ。ただし, $\boxed{\text{答のみ。}}$ (徳島大) (15点)

(ここから) ①の1つの解を $y=x^m$ (m :実数)と予測する。これを①に代入すると $m=(\ 1\ )$ となる。つぎに①の解を $y=x^{(\ 1\ )}+v$ ($v=v(x)$) として, これを①に代入すると v の微分方程式 $v'=(\ 2\ )v^{(\ 3\ )}$ … ②が導ける。これは *Bernoulli* の微分方程式だから $z=v^{(\ 4\ )}$ とおいて②に代入すると z の微分方程式 $z'=(\ 5\ )$ … ③が導ける。これを解けば $z=(\ 6\ )$ $\therefore\ v=(\ 7\ )$
以上より①の一般解は $y=(\ 8\ )$ (C :任意定数)　(ここまで)

注意：②は変数分離型でもある。(6),(7),(8) は任意定数に同じ C を用いること。

３．$\left(e^y-y^2\right)dx+\left(xe^y-2xy+2y\right)dy=0$ … ① の解法に関する以下の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙にかけ。ただし, $\boxed{\text{答のみ。}}$ (10点)

(ここから) $f=e^y-y^2$, $g=xe^y-2xy+2y$ とおけば, $f_y=g_x=(\ 1\ )$ であるから①は完全微分方程式である。$u=u(x, y)$ として, $u_x=f$ … ②, $u_y=g$ … ③を解く。②から $u=(\ 2\ )+\phi(y)$, これを③に代入して $\phi'(y)=(\ 3\ )$ $\therefore\ \phi(y)=(\ 4\ )$, 従って $u=(\ 5\ )$ 以上より①の一般解は

$(\ 6\ )$ (C :任意定数)　(ここまで)　$\boxed{\text{注意：(4)において任意定数は省略せよ。}}$

４．微分方程式 $y''-7y'+12y=6x^2+5x+18$ … ① について, 次の問いに答えよ。(岐阜大) (20点)

(1) $y''-7y'+12y=0$ … ② の線形独立な2つの解 y_1, y_2 を求めよ。ただし, $\boxed{\text{答のみ。}}$

(2) y_1, y_2 の *Wronskian* , $W\left(y_1, y_2\right)$ を求めよ。ただし, $\boxed{\text{答のみ。}}$

(3) ①の1つの解 η を $\boxed{y_1, y_2 \text{ およびそれらの } Wronskian \text{ を用いて}}$ 求めよ。指示に従わない解答には点を与えない。

(4) ①の1つの解 η を $\boxed{\text{山辺の方法を用いて}}$ 求めよ。指示に従わない解答には点を与えない。

注意：山辺の方法を用いたことが分かるような解答をかくこと。また，(3) は途中の計算を省略しないこと。(4) は簡単に求まるので，それを用いたかのような不誠実な (3) の解答は 0 点ではなく −3 点とする。逆に (3) の解法は勉強してきたが，山辺について学習していないような (4) の解答も −3 点とする。これらの判断はわたしが行う。異議は認めない。

5．１階線形微分方程式 $\dfrac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$ … ① の解法に関する以下の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙にかけ。ただし，$\boxed{\text{答のみ。}}$ (16点)

(ここから) ①を全微分方程式の形で表すと $((\ 1\ ))dx+dy=0$ … ② となる。$f=(\ 1\ )$，$g=1$ と表せば $\dfrac{f_y-g_x}{g}=(\ 2\ )$ となり，これは x のみの式になる。従って，②の積分因子を M とすれば $M=(\ 3\ )$ となり，これを②の両辺に掛けたもの，$(\ 3\ )((\ 1\ ))dx+(\ 3\ )dy=0$ … ③ は完全微分方程式になる。そこで $u_x=(\ 3\ )((\ 1\ ))$ … ④，$u_y=(\ 3\ )$ … ⑤ を満たす $u=u(x,y)$ を求める。まず⑤を解いて，$u=(\ 4\ )+\phi(x)$，これを④に代入して $\phi(x)$ を求めると $(\ 5\ )$ となる。

$\therefore u=y(\ 6\ )-\int(\ 7\ )dx$，従って③の一般解，即ち①の一般解は $y=(\ 8\ )$ (C：任意定数)

(ここまで) $\boxed{\text{注意：(5) において任意定数は省略せよ。}}$

6．全微分方程式 $\left(x^2+y^2+x\right)dx+xy\,dy=0$ … ① について，次の問いに答えよ。(14点)

(1) 積分因子 M を求めよ。

(2) ①の両辺に (1) で求めた積分因子を掛けて一般解を求めよ。

7．*Clairaut* の微分方程式 $y=xy'+(y')^3$ … ① の解法に関する以下の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙にかけ。ただし，$\boxed{\text{答のみ。}}$ (8点)

(ここから) ①の両辺を x で微分すると $y''((\ 1\ ))=0$ … ②

*Case*1： $y''=0$ から①の一般解は $y=(\ 2\ )$ (C：任意定数) となる。

*Case*2： $(\ 1\ )=0$ … ③ と①を連立させる。$y'=\alpha$ と表せば $x=(\ 3\ )$，$y=(\ 4\ )$

($(\ 3\ )$，$(\ 4\ )$ は α の式) これらから α を消去して x,y の関係式を導けば $y^2=(\ 5\ )$ となる。これが①の特異解である。($(\ 5\ )$ は x の式)　(ここまで)

8．*Euler* の微分方程式 $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}-3x\dfrac{dy}{dx}+4y=0\quad(x>0)$ … ① を解け。(改・埼玉大) (7点)