2015年度前期末試験問題・応用数学(D4)

１． 周期関数 $f(x)=\begin{cases} x & (-2\leqq x<0) \\ 0 & (0\leqq x<2) \end{cases}$, $f(x+4)=f(x)$ について，次の問いに答えよ。(36点)

N：自然数全体の集合， Z：整数全体の集合

（1） 次の計算の［　］に入る最も適切な答えを解答用紙にかけ。ただし，$\boxed{\text{答のみ。}}$

(ここから)

$f(x)$ の $Fourier$ 級数の定数項を c_0，余弦関数，正弦関数の係数をそれぞれ a_n, b_n $(n\in \mathrm{N})$

とする。$c_0=[\ 1\ ]$，$a_n=\int_{-2}^{0}[\ 2\ ]dx=[\ 3\ ]$ となる。従って自然数 k に対して $a_{2k-1}=[\ 4\ ]$

$a_{2k}=[\ 5\ ]$ となる。$b_n=\int_{-2}^{0}[\ 6\ ]dx=[\ 7\ ]$．以上より $f(x)$ の $Fourier$ 級数は

$f(x)=[\ 1\ ]+\dfrac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}[\ 8\ ]cos[\ 9\ ]+\dfrac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}[\ 10\ ]sin[\ 11\ ]$ となる。

ただし，$x=4l-2$ $(l\in \mathrm{Z})$ のときの関数の値を $f(4l-2)=[\ 12\ ]$ と修正している。(ここまで)

（2） 次の計算の［　］に入る最も適切な答えを解答用紙にかけ。ただし，$\boxed{\text{答のみ。}}$

(ここから) $f(x)$ の複素 $Fourier$ 係数を c_n $(n\in \mathrm{Z})$ とする。$c_0=[\ 1\ ]$，

$n\neq 0, n\in \mathrm{Z} \Rightarrow c_n=\int_{-2}^{0}[\ 2\ ]dx=\dfrac{1}{4}\left([[\ 3\ ]]_{-2}^{0}+\int_{-2}^{0}[\ 4\ ]dx\right)$

$=\dfrac{1}{4}\left([\ 5\ ]+[[\ 6\ ]]_{-2}^{0}\right)=[\ 7\ ]$．以上より $f(x)$ の複素 $Fourier$ 級数は

$f(x)=[\ 1\ ]+\sum_{[\ 8\ ]}^{\infty}[\ 7\ ]exp([\ 9\ ])$ $(exp\,x=e^x)$ (ここまで)

（3） 級数 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2}$ の値を（1）の結果を用いて求めよ。

（4） 級数 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ の値を（1）の結果を用いて求めよ。

２． $x\geqq 0$ で定義された関数 $\phi(x)=\begin{cases} 1-x^2 & (0\leqq x\leqq 1) \\ 0 & (x>1) \end{cases}$ について，次の問いに答えよ。(39点)

$\boxed{\text{注意:（1），（2）は三角関数を用いた式を求めよ。逆に（3）は指数関数のままにせよ。}}$

（1） $\phi(x)$ をすべての実数で定義された偶関数に拡張したものを $f_1(x)$ とするとき，$f_1(x)$ の $Fourier$ 変換 $\mathcal{F}[f_1](u)$ を求めよ。

（2） $\phi(x)$ をすべての実数で定義された奇関数に拡張したものを $f_2(x)$ とするとき，$f_2(x)$ の $Fourier$ 変換 $\mathcal{F}[f_2](u)$ を求めよ。$(f_2(0)=0$ とする$)$

（3） $f(x)=\begin{cases} \phi(x) & (x\geqq 0) \\ 0 & (x<0) \end{cases}$ とするとき，$f(x)$ の $Fourier$ 変換 $\mathcal{F}[f](u)$ を求めよ。

（4）（1）の結果を用いて $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x - x\cos x}{x^3}dx$ の値を求めよ。

（5）$f_1(x)$ を周期 $2l$ $\left(l \text{ は2以上の } \boxed{\text{整数}} \right)$ の関数と考えたとき，次の計算の［　］に入る最も適切な答えを解答用紙にかけ。ただし，$\boxed{\text{答のみ。}}$

(ここから) $f_1(x)$ の $n=-Nl$ から Nl までの有限複素 Fourier 級数を考える。ただし，$N\in\mathbb{N}$

係数を c_n とすれば $c_0=$［ 1 ］，$n\neq 0 \Rightarrow c_n=\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_0^1$［ 2 ］$dx$

$=$［ 3 ］$\cos\dfrac{n\pi}{l}+$［ 4 ］$\sin\dfrac{n\pi}{l}$

$\therefore\ f_1(x)\fallingdotseq$［ 1 ］$+\displaystyle\sum_{\substack{n=-Nl\\ n\neq 0}}^{Nl}\left([\ 3\ ]\cos\frac{n\pi}{l}+[\ 4\ ]\sin\frac{n\pi}{l}\right)\exp([\ 5\ ])$

ここで，$u_n=\dfrac{n\pi}{l}$，$\Delta u_n=u_n-u_{n-1}$ とおけば

$f_1(x)\fallingdotseq$［ 1 ］$+\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{\substack{n=-Nl\\ n\neq 0}}^{Nl}\left([\ 6\ ]\cos u_n+[\ 7\ ]\sin u_n\right)\exp([\ 8\ ])\,\Delta u_n$

$\boxed{\left([\ 6\ ]\sim[\ 8\ ]\text{ は } l \text{ を含まない } u_n \text{ の式}\right)}$

$-$［ 9 ］$\leqq u_n\leqq$［ 9 ］に注意すれば

$\displaystyle\lim_{l\to\infty}\left([\ 1\ ]+\frac{2}{\pi}\sum_{\substack{n=-Nl\\ n\neq 0}}^{Nl}\left([\ 6\ ]\cos u_n+[\ 7\ ]\sin u_n\right)\exp([\ 8\ ])\,\Delta u_n\right)$

$=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{-[\ 9\ ]}^{[\ 9\ ]}[\ 10\ ]\,du$，従ってさらに $N\to\infty$ とすれば $f_1(x)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}[\ 10\ ]\,du$　(ここまで)

3．$u=u(x,y)$ の偏微分方程式 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$　$(0<x<2,\ 0<y<2)$ … ① の非自明解を

$\dfrac{\partial u}{\partial x}(0,y)=\dfrac{\partial u}{\partial x}(2,y)=0$　$(0\leqq y\leqq 2)$ … ②

$u(x,0)=x(2-x)$，$u(x,2)=0$　$(0\leqq x\leqq 2)$ … ③

なる条件を満たすように求める次の計算の［　］に入る最も適切な答えを解答用紙にかけ。なお，この解法は形式的なもので出てきたものが真の解であることは示さなくてよい。ただし，$\boxed{\text{答のみ。}}$

(25点)

(ここから) $u=X(x)Y(y)$ とおいて①に代入し整理すると $\dfrac{X''}{X}=$［ 1 ］$=\lambda$　(λ：定数)となる。

条件②から $X'(0)=X'(2)=0$ … ④ となり，これを満たす $\dfrac{X''}{X}=\lambda$ の解を求めると，

$\lambda>0$ のとき，$X=A\cosh$［ 2 ］$x+B$［ 3 ］　$(A,\ B$ は任意定数$)$，④を満たすのは
$A=B=0$ のときだから不適切。

$\lambda=0$ のとき，$X=A+Bx$，④を満たすのは $X=$ [4]，このとき [1]$=0$ を解くと $Y=C+Dy$

(C，D 任意定数)，従って $u=XY=$ [5]$=K+Ly$ (任意定数をまとめた)

$\lambda<0$ のとき，$X=A\cos$ [6]$x+B$ [7] (A，B は任意定数)，④を満たすのは

$X=A\cos$ [8]x ($A\neq 0$，$n\in\mathrm{N}$)，このとき [1]$=\lambda$ を解くと

$Y=C\cosh$ [9]$+D$ [10] (C，D 任意定数，$n\in\mathrm{N}$)，従って

$u=XY=(K\cosh$ [9]$+L$ [10]$)\cos$ [8]x (任意定数をまとめた) となる。

$u_0=K_0+L_0y$，$u_n=\left(K_n\cosh\text{ [9]}+L_n\text{ [10]}\right)\cos$ [8]x とすれば形式的に

$u=\sum_{n=0}^{\infty}u_n$ は条件②を満たす①の解である。条件③の $u(x,0)=x(2-x)$ から $K_0=$ [11]，

$K_n=$ [12] $\therefore K_{2m-1}=0$，$K_{2m}=$ [13] ($m\in\mathrm{N}$)

さらに条件③の $u(x,2)=0$ から $L_0=$ [14]K_0，$L_n=$ [15]K_n，以上より解は

$$u=\text{[16]}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\cosh n\pi y-\text{[17]}\right)\text{[18]}\cos\text{[19]}x$$

$$=\text{[16]}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sinh\text{[21]}}{\sinh\text{[20]}}\text{[18]}\cos\text{[19]}x \quad \text{(ここまで)}$$

参考: 双曲線関数の加法定理 $\begin{cases}\sinh(x\pm y)=\sinh x\cosh y\pm\cosh x\sinh y\\ \cosh(x\pm y)=\cosh x\cosh y\pm\sinh x\sinh y\end{cases}$ (複号同順)