2015年度前期中間試験問題・応用数学（D4）

１．次の関数 $f(t)$ の $Laplace$ 変換 $F(s)=\pounds\left[f(t)\right](s)$ を求めよ。ただし、答のみ。

（1）　te^{2t}　（2）　$e^{3t}\cos 2t$　（3）　$(t-3)^2U(t-3)$　（4）　$t\sinh 2t$

（5）　$t^2\cos t$　（6）　t^4　（7）　t^2+t^3　（8）　$e^{3t}+e^{-2t}$　（9）　$U(t)+U(t-3)$

（10）　$f(t)=\begin{cases}0 & \left(0<t\leqq 3\right)\\ 2 & (t>3)\end{cases}$　（11）　$\cos^2 t-\sin^2 t$　（12）　$\dfrac{e^{2t}-e^{-t}}{t}$

（13）　$t^2U(t-1)$

２．n を自然数、a,ω を正の定数とする。このとき、次の文章の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙にかけ。ただし、答のみ。

$t^n=\{(t-a)+a\}^n=\sum_{k=0}^{n}(\ 1\ )(t-a)^k$ … ①　，$\pounds\left[(t-a)^kU(t-a)\right]=(\ 2\ )$ … ②

①, ②より $\pounds\left[t^nU(t-a)\right]=\sum_{k=0}^{n}(\ 3\ )=\dfrac{e^{-as}}{s^{n+1}}\sum_{k=0}^{n}(\ 4\ )$

$\sin\omega t=\sin\omega\{(t-a)+a\}=(\ 5\ )\sin\omega(t-a)+(\ 6\ )\cos\omega(t-a)$ … ③

$\pounds[U(t-a)\sin\omega(t-a)]=(\ 7\ )$，$\pounds[U(t-a)\cos\omega(t-a)]=(\ 8\ )$ … ④

③, ④より $\pounds[U(t-a)\sin\omega t]=\dfrac{(\ 9\ )}{s^2+\omega^2}$，同様に考えて $\pounds[U(t-a)\cos\omega t]=\dfrac{(\ 10\ )}{s^2+\omega^2}$

$F=F(s)=\pounds[\sin\omega t]$ とすれば、$\left(s^2+\omega^2\right)F=\omega$，この両辺を n 回微分する。$\left(n\geqq 2\right)$
左辺の n 回微分に $Leibniz$ (ライプニッツ) の公式を用いると

$\left(s^2+\omega^2\right)F^{(n)}+(\ 11\ )F^{(n-1)}+(\ 12\ )F^{(n-2)}=0$，像関数の微分法則を用いて

$\pounds\left[t^n\sin\omega t\right]=(\ 13\ )\pounds\left[t^{n-1}\sin\omega t\right]+(\ 14\ )\pounds\left[t^{n-2}\sin\omega t\right]$ なる漸化式が導かれる。

３．次の関数 $F(s)$ の逆 $Laplace$ 変換 $f(t)=\pounds^{-1}\left[F(s)\right](t)$ を求めよ。
ただし、問題（1），(2)，(3)，(4)，(6)，(7) は答のみ。(5)，(8) は解法をかけ。

（1）　$\dfrac{4}{(s+3)^5}$　（2）　$\dfrac{1}{s^2-5s-6}$　（3）　$\dfrac{s}{s^2+4s+7}$　（4）　$\dfrac{s}{\left(s^2+3\right)^2}$

（5）　$\dfrac{s^2-2s+2}{(s+2)(s-2)(s-3)}$　（6）　$\dfrac{s^2-3}{\left(s^2+3\right)^2}$　$Hint$：$\dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{s}{s^2+3}\right)$

（7）　$\dfrac{1}{\left(s^2+3\right)^2}$　$Hint$：（6）の結果を使う

（8）　$\dfrac{\sqrt{3}\left(s^2-3\right)}{\left(s^2+3\right)^3}$　$Hint$：（6）の結果と畳込み $\Rightarrow$ $\dfrac{\sqrt{3}\left(s^2-3\right)}{\left(s^2+3\right)^3}=\dfrac{s^2-3}{\left(s^2+3\right)^2}\dfrac{\sqrt{3}}{s^2+3}$

４．$x=x(t)$ に関する積分方程式　$x'+2x+\int_0^t x(t-\tau)e^{2\tau}d\tau=\sin 2t$，$x(0)=1$ … ①

について、次の各問いに答えよ。なお、$X = X(s) = \mathcal{L}[x]$ とする。

（1） ①の両辺の $Laplace$ 変換をとることにより、X を求めよ。

（2） 上の（1）で求めた X の逆 $Laplace$ 変換を計算して、①の解 x を求めよ。

必要なら次の公式を用いてよい。 $\displaystyle\int e^{ax} \sin bx\, dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a \sin bx - b \cos bx)$