2015年度前期末試験問題・応用数学Ⅲ(C5)

１． *Clairaut* の微分方程式 $y = xy' + \sqrt{a^2 (y')^2 + b^2}$ $(ab \neq 0)$ … ① の解法に関する次の計算の［　　］に入る最も適切な答えを解答用紙にかけ。ただし, $\boxed{\text{答のみ。}}$ (12点)

(ここから) ①の両辺を x で微分し, 整理すると y''([１]) = 0 となる。従って $y'' = 0$, [１] = 0 を解く。

*Case*１： $y'' = 0$ から $y' = C$ （ C : 任意定数）となるから, ①の一般解は $y =$ [２] となる。

*Case*２： [１] = 0 … ②とする。 $\alpha = y'$ と表して①, ②を連立させ α を消去する。②から

$x =$ [３] … ③, これを①に代入して $y = \dfrac{[\ 4\ ]}{\sqrt{a^2\alpha^2 + b^2}}$ … ④

これらから $\dfrac{x}{a} =$ [５] , $\dfrac{y}{b} =$ [６] ∴ [７] = 1 となる。これは①の特異解である。

(ここまで)

２． *Bernoulli* の微分方程式 $y' + y = y^2(\cos x - \sin x)$ … ① の解法に関する次の計算の［　　］に入る最も適切な答えを解答用紙にかけ。ただし, $\boxed{\text{答のみ。}}$ (13点)

(ここから) $z = \dfrac{1}{y}$ とおけば $z' =$ [１] であるから①は z の微分方程式

[２] $= \sin x - \cos x$ … ②となる。 [２] = 0 を解くと, $z = C$ [３] （ C : 任意定数）

C を x の関数 $u = u(x)$ とおいて $z = u$ [３] … ③, これを②に代入すると $u' =$ [４] , 従って

$u = \int$ [４] $dx =$ [５] $+ C$ （ C : 任意定数）, これを③に代入して $z =$ [６] ∴ $y =$ [７]

(ここまで)

３． 実数を成分とする２次正方行列全体のなす集合 $M_2(\mathrm{R})$ は行列の和, 行列の実数倍をそれぞれ, ベクトルの和, スカラー倍とみなすと４次元実ベクトル空間になる。標準の基底は

$\left\{ B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ である。次の問いに答えよ。

ただし, $\boxed{\text{(1), (2), (3) は答のみ。}}$ (25点)

(1) $M_2(\mathrm{R})$ から R への写像 $F : M_2(\mathrm{R}) \to \mathrm{R}$ を $F\left(\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}\right) = x_1 + x_4$ と定義する。

次の文章は F が線形写像であることを証明したものである。［　　］に入る最も適切な答えを解答用紙にかけ。（ [１]～[４] はすべて正解で点を与える）

(ここから) $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix}$ とし k, l を実数とすれば

$kX + lY = \begin{pmatrix} [\ 1\ ] & [\ 2\ ] \\ [\ 3\ ] & [\ 4\ ] \end{pmatrix}$, よって $F(kX + lY) =$ [５] $= k$([６]) $+ l$([７])

$=kF(X)+lF(Y)$　(ここまで)

(2)　$X=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}=x_1B_1+x_2B_2+x_3B_3+x_4B_4$ に対して R^4 のベクトル $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ を対応させるとき，この $\boldsymbol{x}$ を X の基底 $\{B_1, B_2, B_3, B_4\}$ に関する座標という。この対応は明らかに $M_2(\mathrm{R})$ から R^4 への線形写像である。行列 A を定め（1）の線形写像 F を $F(X)=A\boldsymbol{x}$ と表すとき，A の成分表示を求めよ。

(3)　$W=Ker\,F=\{X\in M_2(\mathrm{R})\,|\,F(X)=0\}$ とする。W は $M_2(\mathrm{R})$ の部分空間である。(このことは証明しなくてよい) W の次元，$dim\,W$ を求めよ。

(4)　W の１組の基底を求めよ。

(5)　$X=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix}\in M_2(\mathrm{R})$ に対して，内積（X, Y）を

$(X, Y)=\sum_{i=1}^{4} x_i y_i$ と定義する。(内積の公理を満たすことが知られている) このとき，W の直交補空間 $W^{\perp}$ の１組の基底を求めよ。

4．２階線形微分方程式 $x^2y''+3xy'+y=x^2$ $(x>0)$ ① について，次の問いに答えよ。
ただし，$\boxed{\text{(2), (3), (5) は答のみ。}}$ (25点)

(1)　$x^2y''+3xy'+y=0$ … ② の1つの解を $y_1=x^m$ (m：定数)と予想して求めよ。

(2)　$u=u(x)$ として y_1 と線形独立な②の解を $y_2=u\,y_1$ とする。次の計算の［　　］に入る最も適切な答えを解答用紙にかけ。

(ここから) $y_2{}'=$［ 1 ］, $y_2{}''=$［ 2 ］だから，これを②に代入して計算し，$U=u'$ とおけば U の１階微分方程式［ 3 ］が導ける。これを解いて $U=$［ 4 ］(C_1：任意定数)，従って $u=C_1$［ 5 ］$+C_2$ (C_1, C_2：任意定数)となる。y_2 を１個求めればよいので $C_1=1$, $C_2=0$ とれば，$y_2=$［ 6 ］となる。(ここまで)

(3)　y_1, y_2 の $Wronskian$，$W(y_1, y_2)$ を求めよ。

(4)　①の１つの解を Y とする。y_1, y_2 を用いて Y を求めよ。

(5)　以上のことから①の一般解を求めよ。(任意定数を C_1, C_2 とせよ)

5．$Riccati$ の微分方程式 $y'+(2x+1)y-y^2=x^2+x+1$ … ① について，次の問いに答えよ。
ただし，$\boxed{\text{(1), (4) は答のみ。}}$ (15点)

(1)　①の１つの解 y_1 を視察により求めよ。

(2)　$v=v(x)$ とし，$y=y_1+v$ とおき①に代入して v の微分方程式を導け。

(3)　(2)で導いた微分方程式を解いて v を求めよ。

(4) 以上のことから①の一般解を求めよ。(任意定数を C とせよ)

6．R^4 の部分空間 W_1, W_2 を $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ としたとき

$W_1=\left\{\boldsymbol{x}\in\mathrm{R}^4 \,\middle|\, x_2+x_3+x_4=0\right\}$, $W_2=\left\{\boldsymbol{x}\in\mathrm{R}^4 \,\middle|\, x_1+x_2=0,\ x_3=2x_4\right\}$

とする。(これらが部分空間になることは証明しなくてよい) このとき，交空間 $W_1\cap W_2$ の１組の基底と次元を求めよ。(10点)