2015年度前期中間試験問題・応用数学Ⅲ（C5）

１．媒介変数 t で表示された関数 $\begin{cases} x=\dfrac{3at}{1+t^3} \\ y=\dfrac{3at^2}{1+t^3} \end{cases}$ $(a>0:$ 定数$)$ について、次の文章の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙にかけ。ただし、<u>答のみ</u>。

注意：（　）は t，［　］は a の式であり、＜　＞は数値である。

$\dfrac{dx}{dt}=$（１），$\dfrac{dy}{dt}=$（２）より、媒介変数の微分法から $\dfrac{dx}{dt}\neq 0$ のとき

$\dfrac{dy}{dx}=$（３） … ① となる。次に、$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)=\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)\dfrac{dt}{dx}$ であるから、①を用いると $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)=$（４）となり、逆関数の微分法から $\dfrac{dt}{dx}=$（５）となるので、$\dfrac{d^2y}{dx^2}=$（６）となる。$\dfrac{dy}{dx}=0$ を満たす t の値は、$t=0$，＜７＞である。$t=0$ のとき $\dfrac{d^2y}{dx^2}=$［８］，$t=$＜７＞のとき $\dfrac{d^2y}{dx^2}=$［９］となる。$a>0$ だから x の関数 y の極大値は［10］，極小値は＜11＞となる。

２．$I=\displaystyle\int \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}\,dx$ を求める次の文章の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙にかけ。ただし、<u>答のみ</u>。

$x=\sin\theta$ $\left(-\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ と置換すれば $I=\displaystyle\int$（１）$d\theta$ となる。さらに $u=\tan\theta$ と置換すれば、$du=$（２）$d\theta$ であるから $I=\displaystyle\int$（３）$du=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$（４）となる。この式に $u=\tan\theta$ を代入し、さらに $-\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ で $\tan\theta$ を x の式で表せば $\tan\theta=$（５）(逆三角関数使用不可)

だから $I=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$（６）

３．$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\mathrm{Tan}^{-1}x}{x^2\log(1+x)}$ について、次の問いに答えよ。ただし、<u>答のみ</u>。

（1） $f(x)=\mathrm{Tan}^{-1}x$ とおくとき、次の微分係数の値を求めよ。

［1］ $f'(0)$　　［2］ $f''(0)$　　［3］ $f^{(3)}(0)$

（2） $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\mathrm{Tan}^{-1}x}{x^2\log(1+x)}$ の値を求める次の文章の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙にかけ。なお x は十分０に近い値とする。

$sin\,x=[\ 1\ ]+o\left(x^3\right)$, $Tan^{-1}=[\ 2\ ]+o\left(x^3\right)$, $log\,(1+x)=[\ 3\ ]+o\,(x)$

$\therefore x^2\,log\,(1+x)=[\ 4\ ]+o\left(x^3\right)$, 以上より $\dfrac{sin\,x-Tan^{-1}x}{x^2\,log\,(1+x)}=\dfrac{[\ 5\ ]+o\left(x^3\right)}{[\ 4\ ]+o\left(x^3\right)}$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sin\,x-Tan^{-1}x}{x^2\,log\,(1+x)}=[\ 6\ ]$

4． 対数微分法を用いて $y=\sqrt{\dfrac{(x+3)\ (x+4)}{(x+1)\ (x+2)}}$ の導関数を求めよ。結果はひとつの項で表せ。

5． $y=y\,(x)$ の２階線形常微分方程式 $y''-2y'-3y=6\,cos\,3x$ の解法を記述した次の文章の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙にかけ。ただし、答のみ。

D を $Heaviside$ の演算子とする。$y''-2y'-3y=\left(D^2-2D-3\right)y$ より問題の微分方程式は $\left(D^2-2D-3\right)y=6\,cos\,3x$ となる。まず、$\left(D^2-2D-3\right)y=0$ を解くと $y=(\ 1\ )$ $\left(\ C_1, C_2\right.$ は任意定数$\left.\right)$ となる。次に問題の微分方程式の１つの解 η を求めるために

$\left(D^2-2D-3\right)y=6e^{(\ 2\ )}$ を解く。$y=\dfrac{1}{\left(D^2-2D-3\right)}\left(6e^{(\ 2\ )}\right)=(\ 3\ )\,e^{(\ 2\ )}$

この実部をとって、$\eta=(\ 4\ )$ となる。以上より $y''-2y'-3y=6\,cos\,3x$ の解は $y=(\ 5\ )$ となる。

6． $y=y\,(x)$ の２階線形常微分方程式 $y''-y=e^x$ … ① の解法を記述した次の文章の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙にかけ。ただし、答のみ。

$y''-y=0$ を解けば、$y=(\ 1\ )$ $\left(\ C_1, C_2\right.$ は任意定数$\left.\right)$ となる。次に問題の微分方程式の１つの解 η を $Heaviside$ の演算子を用いて解くと、$\eta=\dfrac{1}{D^2-1}\left(e^x\right)=\dfrac{1}{D-1}\left(\dfrac{1}{D+1}\left(e^x\right)\right)$

$=\dfrac{1}{D-1}\,((\ 2\ ))=(\ 3\ )$ 以上より①の解は $y=(\ 4\ )$ となる。

7． $y=y\,(x)$ の２階線形常微分方程式 $y''-3y'+y=x^2+2x-3$ の１つの解を、山辺の方法を用いて求めよ。山辺の方法を用いたことが分かる解答をかけ。

8． 次の各問いに答えよ。(信州大)

(1) $|x|\leqq\dfrac{1}{2}$ ならば、$\left|log\,(1+x)-x\right|\leqq 2x^2$ が成立することを証明せよ。

$Rule$： A, B が実数で $A\geqq 0$ のとき、$|B|\leqq A$ の証明は $-A\leqq B\leqq A$ を証明する。

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}log\left(1+\dfrac{1}{n}\,cos\,\dfrac{k}{n}\right)=sin\,1$ を証明せよ。

$Basic\ Point$： 関数 $f(x)$ が閉区間 $[0, 1]$ で連続ならば、

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k-1}{n}\right)=\int_0^1 f(x)\,dx$$