後期中間試験問題・応用数学Ⅱ（C4）

１．次の問いに答えよ。ただし、答のみ。

（1） 確率変数 X_1, X_2 がそれぞれ正規分布 $N\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right), N(2, 4)$ に従うとき、$\frac{X_1+X_2}{2}$ の平均を求めよ。

（2） （1）の確率変数が互いに独立のとき、$\frac{X_1+X_2}{2}$ の分散を求めよ。

（3） 確率変数 X_1, X_2 は互いに独立で、それぞれ *Poisson* 分布 $P_o(2)$, $P_o(3)$ に従うとき

［1］ 平均 $E\left[X_1+X_2\right]$ を求めよ。　　［2］ 分散 $V\left[X_1+X_2\right]$ を求めよ。

（4） 52枚のトランプカードから１枚抜いてもとに戻す。これを26回繰り返し行うとき、出るカードの数の平均を $\overline{X}$ とするとき、次の各問いに答えよ。ただし、J, Q, K はそれぞれ 11, 12, 13 とする。

［1］ $E\left[\overline{X}\right]$ を求めよ。　　［2］ $V\left[\overline{X}\right]$ を求めよ。

（5） 正規母集団 $N(10, 4)$ から大きさ100の標本を無作為抽出する。このとき、$\overline{X} \leqq 10.51$ となる確率を求めよ。

（6） 正規母集団 $N(\mu, 20)$ から抽出した大きさ25の無作為標本の不偏分散 U^2 について、$P\left(U^2 \leqq k\right)=0.5$ となる定数 k の値を求めよ。

（7） 確率変数 T が自由度20の t 分布に従うとき、$P\left(|T| \geqq k\right)=0.05$ を満たす k の値を求めよ。

（8） １つのさいころを２回投げて、１回目と２回目に出る目をそれぞれ X_1, X_2 とする。$X=X_1-X_2$ とするとき、次の各問いに答えよ。

［1］ $E[X]$ を求めよ。　　［2］ $V[X]$ を求めよ。

（9） 確率変数 X_1, X_2 は互いに独立で、それぞれ二項分布 $B\left(8, \frac{1}{2}\right), B\left(12, \frac{1}{4}\right)$ に従うとき、次の各問いに答えよ。

［1］ $E\left[X_1-2X_2\right]$ を求めよ。　　［2］ $V\left[X_1-2X_2\right]$ を求めよ。

２．正規母集団 $N\left(\mu, \sigma^2\right)$ から抽出した大きさ36の無作為標本の標本平均を $\overline{X}$、不偏分散を U^2 とする。このとき、$P\left(\left|\frac{\overline{X}-\mu}{\sqrt{U^2}}\right|<k\right)=0.95$ を満たす定数 k の値を小数第３位まで求めよ。

３．２つの正規母集団 $N(\mu_1, 2), N(\mu_2, 5)$ から独立に抽出した大きさが 25, 20 の無作為標本の不偏分散をそれぞれ $U_1{}^2, U_2{}^2$ とする。このとき、$P\left(U_1{}^2<mU_2{}^2\right)=0.975$ を満たす定数 m の値を求めよ。

４．確率変数 X の確率分布が $P(X=k)=p(1-p)^k$ （ $0<p<1$：定数、$k=0, 1, 2, \cdots$ ）であるとする。このとき、X が従う確率分布を幾何分布といい記号で $G(p)$ と表す。次の各問いに

答えよ。

(1)　$\sum_{k=0}^{\infty}(1-p)^k$ を求めよ。ただし、<u>答のみ</u>。　　(2)　X の平均 $E[X]$ を求めよ。

(3)　確率変数 X_1, X_2 は互いに独立でいずれも $G(p)$ に従うとき、$Z=X_1+X_2$ の確率分布を求めよ。つまり、$P(Z=m)$　$(m=0,1,2,\cdots)$ を求めよ。

5．正規母集団から無作為に大きさ5の標本を抽出したところ、次の値を得た。次の各問いに答えよ。ただし、(1),(2) は<u>答のみ</u>。

26.3　25.5　24.3　26.1　23.3

(1)　標本平均の実現値 $\overline{x}$ の値を求めよ。　　(2)　不偏分散の実現値 u^2 の値を求めよ。

(3)　母平均 μ の 95% 信頼区間を求めよ。(信頼限界の値は小数第2位まで求めよ)

6．$X_1, X_2, \cdots, X_n$ を母平均 $\mu \neq 0$ の同じ母集団から抽出した大きさ n の無作為標本とする。

$a_1, a_2, \cdots, a_n$ を定数とするとき、確率変数 $T=\sum_{i=1}^{n} a_i X_i$ が母平均 μ の不偏推定量になるための条件を求めよ。

7．K を定数とするとき、確率変数 X, Y の同時確率密度関数が

$$f(x,y)=\begin{cases} Ke^{-2x-3y} & (x>0,\ y>0) \\ 0 & (\text{それ以外の } x,\ y) \end{cases}$$

で与えられている。次の各問いに答えよ。

(1)　K の値を求めよ。

以下、(1) で求めた K の値を用いよ。

(2)　X の周辺確率密度関数 $f_1(x)$ を求めよ。

(3)　Y の周辺確率密度関数 $f_2(y)$ を求めよ。

8．母平均 μ、母分散 σ^2 の母集団から抽出した大きさ n の無作為標本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ の標本平均、標本分散、不偏分散をそれぞれ $\overline{X}, S^2, U^2$ と表すとき、次の括弧に入る最も適切な文字式を解答用紙にかけ。ただし、<u>答のみ</u>。なお、(　) は μ と σ^2 の式、<　> は μ の式、[　] は σ^2 の式である。

(ここから)　$E[X_i]=<1>,\ V[X_i]=[\ 2\ ],\ E[\overline{X}]=<3>,\ V[\overline{X}]=[\ 4\ ]$ であるから

$E[X_iX_j]=\begin{cases} (\ 5\ ) & (i=j) \\ <6> & (i\neq j) \end{cases},\ E\left[(\overline{X})^2\right]=(\ 7\ ),\ E\left[X_i\overline{X}\right]=(\ 8\ )$ となる。従って

$E\left[\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2\right]=\sum_{i=1}^{n}[\ 9\ ]=[\ 10\ ]\quad \therefore E[U^2]=[\ 11\ ],\ E[S^2]=[\ 12\ ]$

またチェビシェフの不等式から、任意の $\varepsilon>0$ に対して $P\left(\left|\overline{X}-<13>\right|<\varepsilon\right)\geqq[\ 14\ ]$