2014年度前期末試験問題・応用数学Ⅰ(C4)

１． X の確率密度関数が $f(x)=\begin{cases} a\left(1-x^3\right) & \left(0 \leqq x \leqq 1\right) \\ 0 & (x<0,\ x>1) \end{cases}$ のとき、次の問いに答えよ。ただし、答のみ。(a は定数)

(1) a の値を定めよ。

以下、(1) で求めた a の値を使うこと。

(2) X の平均、$E[X]$ を求めよ。　(3) X の分散、$V[X]$ を求めよ。

２． X の確率密度関数が $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{7} & \left(-2 \leqq x \leqq 5\right) \\ 0 & (x<-2,\ x>5) \end{cases}$ のとき、次の各問いに答えよ。ただし、答のみ。

(1) X の平均、$E[X]$ を求めよ。　(2) X の分散、$V[X]$ を求めよ。

(3) X のモーメント母関数 $M_X(t)=E\left[e^{tX}\right]$ を求めよ。ただし、$t \neq 0$ とする。

(4) $M_X(t)$ の *Maclaurin* 展開は $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}\, t^{n-1}$ となる。a_{n-1} を求めよ。

(5) X の n 次モーメント、$E\left[X^n\right]$ を求めよ。ただし、n は自然数。

３． １枚の硬貨を５回独立に投げる。このとき、表が出る回数を X とするとき、次の各問いに答えよ。なお、１回投げるとき表が出る確率は $\dfrac{1}{2}$ である。ただし、答のみ。

(1) X はどのような確率分布に従うか。その確率分布を表す記号を用いて答えよ。

(2) $X=k$ となる確率 $P(X=k)$ を求めよ。ただし、$k=0,1,2,3,4,5$ とする。

(3) $E[X]$ を求めよ。　(4) $V[X]$ を求めよ。

(5) $M_X(t)=E\left[e^{tX}\right]$ は $\{f(t)\}^5$ となる。$f(t)$ を求めよ。

(6) $E\left[X^2\right]$ を求めよ。

４． X が *Poisson* 分布 $P_0\left(\dfrac{1}{2}\right)$ に従うとき、次の各問いに答えよ。ただし、答のみ。

(1) $E[X]$ を求めよ。　(2) $V[X]$ を求めよ。　(3) $E\left[X^2\right]$ を求めよ。

(4) $M_X(t)=E\left[e^{tX}\right]$ は $e^{-\frac{1}{2}}f(t)$ となる。$f(t)$ を求めよ。ただし、級数の形は不正解とする。

５． X が正規分布 $N(20,100)$ に従うとき、次の各問いに答えよ。ただし、答のみ。

(1) $E[X]$ を求めよ。　(2) $V[X]$ を求めよ。　(3) $E\left[X^2\right]$ を求めよ。

(4) $P\left(10 \leqq X \leqq 30\right)$ の近似値を、正規分布表から求めよ。

６．ある製品は、過去の経験から $\dfrac{1}{1000}$ の不良品を含むとされている。この製品から任意に1000個を抽出するとき、不良品の数を X とする。このとき、次の各問いに答えよ。なお、この製品は抽出す

る個数に比べて非常に多く生産されているものとする。ただし、<u>答のみ</u>。

（1） X はどのような確率分布に従うか。その確率分布を表す記号を用いて答えよ。

（2） 確率 $P(X=4)$ を、*Poisson* 分布で近似して求めよ。

7． １つのさいころを１５０回投げるとき、１の目が出る回数 X が２０回以上３５回以下である確率の近似値を、*de Moivre−Laplace* の定理を用いて求めよ。(電卓使用)

注意： 解答は説明を書くこと。X がどのような分布に従い、*de Moivre−Laplace* の定理からどのような分布で近似でき、X を標準化した確率変数がどのような分布に従うかを書くこと。つまり解答には３つの分布が出てくる。

8． X の確率密度関数が $f(x)=\begin{cases} ax\,exp\left(-\dfrac{\pi}{4}x^2\right) & (x \geqq 0) \\ 0 & (x<0) \end{cases}$ のとき、次の各問いに答えよ。ただし、a は定数。

（1） a の値を定めよ。ただし、<u>答のみ</u>。

以下、（1）で求めた a の値を使うこと。

（2） X の分布関数 $F(x)=P(X \leqq x)$ を求めよ。

（3） $P(X \leqq c)=\dfrac{1}{3}$ を満たす c の値を求めよ。

9． X が二項分布 $B(n,p)$ に従うとき、次の各問いに答えよ。ただし、$0<p<1$ とする。

（1） $E[X(X-1)(X-2)]=n(n-1)(n-2)p^3$ を証明せよ。

（2） 上の（1）の結果を用いて、$E[X^3]$ を求めよ。

ヒント：$X(X-1)(X-2)=X^3-3X^2+2X$

（3） $\mu=E[X]$ とおくとき、$E[(X-\mu)^3]$ を求めよ。(n と p の式)

（4） 歪度(ひずみ) $\dfrac{E[(X-\mu)^3]}{\sigma^3}$ を求めよ。ただし、$\sigma=\sqrt{V[X]}$ である。(n と p の式)