

相対論的な効果としての磁場について

佐藤 憲史*

Magnetic Fields as the Relativity Effects

Kenji Sato*

Abstract: Magnetic force or Lorentz force is due to the relativistic effects. Lorentz force can be derived from the Lorentz contraction of electrons and metal ions in a wire with an electrical current. In this paper, we investigate three questions to the explanation of magnetic force based on Lorentz contraction: Is it applicable to arbitrary speeds of the test charge? Is the charge neutrality in the wire realized under any circumstances? And, why is the relativistic effect observed strongly? As a result, the formation is derived for arbitrary speeds of the test charge. The charge neutrality is discussed from the viewpoint of electromagnetic induction. We point out that the magnetic fields as the relativity effects are enhanced by magnetic materials.

Key Words: magnetic field, relativity, Lorentz contraction

1. はじめに

磁場は磁石を用いることで磁力として実測できる。その磁場は相対論的な効果であることが電磁気学の文献に述べられている^[1-3]。相対論的な効果は運動する系の速度を v 、光速 c としたとき $(v/c)^2$ の程度で現れるが、通常この値は 1 より十分小さく、ほとんど無視できる。ところが電磁石などに見られるように強大な力として出現する。「磁場が相対論的な効果である」ことは、電流が流れている直線導体と平行に運動する電荷に関する思考実験で明らかにされている。導体が静止した系では運動する電荷にローレンツ力が働くこと観測される。電荷と等速運動する系では電荷は静止しておりローレンツ力は働かないように観測される。その代り電流を構成する正電荷と電子の中性がローレンツ収縮によってくずれ電場が発生して外部の電荷にクーロン力が働く。ローレンツ力として観測されたものが、異なる系ではクーロン力として観測される。クーロン力は電荷の存在そのものに起因するが、ローレンツ力は電荷が運動することで出現し、相対論的な効果といわれる所以である。

この思考実験について、我々はいくつかの疑問をもった。第1は、電流が流れる導体やその近傍に置かれた電荷の形状や速度が限定的な場合にしか成り立っていないのではないか、ということである。一般には、慣性系間の電磁場の変換はローレンツ変換を用いて導くことができる。上記の思考実験はその物理的な意味を理解する上で大変教育

的であるが、電荷の速度や方向が任意でもローレンツ変換と矛盾しないのであろうか。第2は、電荷中性の捉え方である。電流が流れていない金属導体内で電荷中性であるという仮定は自然である。電流が電子の運動によるものであれば、電流が流れることで電子流がローレンツ収縮を起し電荷中性が崩れているのではないか。この疑問についてはすでに報告し^[4]、その実験的な検証を試みた^[5]。導体の電流で電荷中性が崩れ周辺に電場が発生することを実験的に検証することはできなかった。しかし、微弱な量を観測できていないのであって存在が否定されたわけではない。第3は、相対論的な効果である磁場がなぜ現実に大きな力として観測されるのか、である。発電やモーターなど磁力を応用した技術は強大な力を発揮している。普段、それを相対論的な効果として認識することはないが、巨大な力として出現することをどのように理解すべきか。本報告では、電磁気学の理解に供することを目的として、これら3つの疑問について考察した結果を述べる。

2. 電流と電荷に働く力

2.1 直線電流と電荷

電流とその近傍を運動する電荷間に働く力について、これまでいくつかの文献に掲載されている思考実験を再検討する。図1に示すように、直線状導体に電流 I が流れている。この電流は導体内部の電子の運動であり、電荷線密度 ρ_- の電子が電流と反対向きに $-v$ の速度でドリフトしている。線密度 ρ_+ の正電荷は静止している。図では正電荷と電子を便宜上分離して示しているが、一様に分布すると仮定している。導線の外部で r の距離に試験電荷 q があり導線と平行に速度 V で運動しており、ローレンツ力 F が働

* 電気電子工学科

Department of Electrical and Electronics Engineering

く。ファインマンらの著書では、試験電荷が電子と同じ向きに同じ速度で運動する場合は示された^[2]。ここでは、試験電荷の速度を任意とした場合に拡張してみる。

これまでの文献では、導体が静止した系（実験系）では導体に流れる電流について、正電荷と電子は中和しており外部に電場は発生しないことが前提となっている。つまり

$$\rho_+ + \rho_- = 0 \quad (1)$$

である。試験電荷と等速で運動する系（試験電荷系）において電荷に働く力を考える。電荷は静止しておりローレンツ力は発生しない。試験電荷系では、導線内の正電荷は $-V$ の速度で運動し、電子は相対論の速度合成の公式から

$$V' = \frac{-v-V}{1+vV/c^2} \quad (2)$$

の速度で運動する。それに伴いローレンツ収縮によって各電荷の電荷密度が異なって観測される。試験電荷系で観測される電荷密度の和はゼロではなくなり、

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}} - \frac{\sqrt{1-v^2/c^2}}{\sqrt{1-V'^2/c^2}} \right) \rho_+ = -\frac{vV/c^2}{\sqrt{1-V^2/c^2}} \rho_+ \quad (3)$$

となる。左辺第 1 項は正電荷の運動による効果である。第 2 項は電子の運動によるが、(1)式より分子に $\sqrt{1-v^2/c^2}$ の項が必要となることを以下に示す。静止した電子の線密度を ρ_0 とし、 $-v$ の速度で運動する電荷線密度は、

$$\rho_- = \frac{\rho_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad (4)$$

で与えられ、 V の速度で運動する場合は v を V で置き換えた値になる。これらの関係式から (3) 式が得られる。

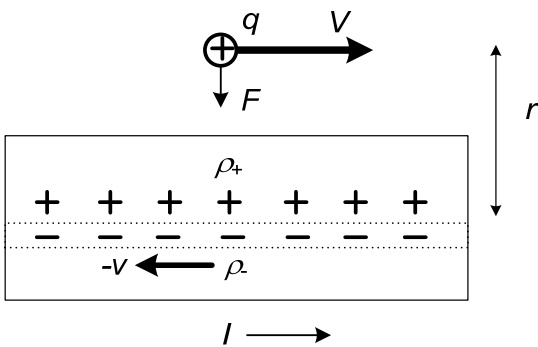


図 1. 電流が流れている直線状導体と試験電荷。

電荷中性が崩れ電場が発生することにより、試験電荷は以下のクーロン力を受ける。

$$-\frac{vV/c^2}{2\pi\epsilon_0 r \sqrt{1-V^2/c^2}} q\rho_+ = -\frac{\mu_0 vVq\rho_+}{2\pi r \sqrt{1-V^2/c^2}} \quad (5)$$

ただし、真空の誘電率を ϵ_0 、透磁率を μ_0 として、 $c^2 = 1/\epsilon_0\mu_0$ の関係式を用いた。この力はもとの実験系で観測されるロ

ーレンツ力、

$$F = -\frac{\mu_0 vVq\rho_+}{2\pi r} = -\frac{\mu_0 VqI}{2\pi r} \quad (6)$$

に相当する。(5)式において $\sqrt{1-V^2/c^2}$ の項は、実験系では力のローレンツ変換で消滅する。実験系でローレンツ力として観測されたものが別の系ではクーロン力として観測される。以上が、磁場が相対論的な効果であることを示す思考実験である。試験電荷の速度を任意に拡張しても矛盾がないことがわかる。試験電荷の運動方向を任意とした場合、例えば導線に対し垂直方向に運動する場合も、定性的には同様にして説明できることがパーセルによって示されている^[1]。ある系で電荷中性となっており電場がなく磁場のみがある場合、その系に対して一定速度で運動している系については、上記の思考実験は一般的に適用でき、近似等を用いることなく、ローレンツ変換と矛盾しないことが確認できた。

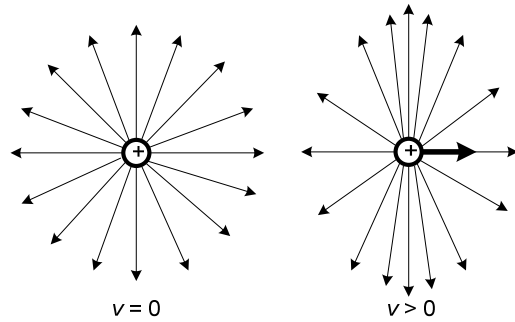


図 2. 静止した点電荷と運動する点電荷が作る電場。

2. 2 運動する点電荷

ローレンツ収縮の考え方は直線状導体とそれに平行に運動する電荷の系には適用しやすいが、例えばソレノイドコイルとその中を運動する電荷など一般的には適用が困難になる。そこで、点電荷の運動から理解することが基本となる。図 2 に示すように、静止した点電荷がある場合、放射状に球対称な電場が発生する。この電荷が速度 v で等速運動をしているとき、電場はどのように観測されるか、を考える。点電荷の場合には前節で述べたローレンツ収縮を適用することは不可能であり、ローレンツ変換を用いることが簡便である。静止した系の電場 \mathbf{E}' に対し、速度 $-v$ で運動する系の電場 \mathbf{E} を求めればよい。電場 \mathbf{E} は、

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}'_{\parallel} + \frac{\mathbf{E}'_{\perp}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad (7)$$

で与えられる。 \mathbf{E}'_{\parallel} 、 \mathbf{E}'_{\perp} は静止した点電荷が作る電場の速度ベクトルに平行な成分と垂直な成分である。点電荷の進行方向に対して垂直方向で電場が増大する。図 2 はこれを模式的に示している。電荷が運動することによって等電位面が楕円状にゆがむ。これはヘヴィサイトの楕円体として

知られており、マックスウェルの方程式から導出されている。直線電流では多数の電子が導線に沿って等速運動しており、各電子の電場を重ね合わせると速度ベクトルに垂直な方向のみになる。反対符号を持つ正電荷が静止して存在すると電場を打ち消す方向に働くが、 $\sqrt{1-v^2/c^2}$ の効果で電場が残る。ローレンツ収縮による電荷密度の変化を持ち出さなくとも電場が出現することが理解される。ローレンツ収縮に伴う電荷中性の崩れは、電荷の運動に伴う電場のゆがみと等価である。磁場は、運動する系から見ると電場がゆがむ効果を表すために必要であり、相対論的な効果である。

3. 電荷の中性について

3. 1 パーセルのモデル

パーセルの著書^[1]では、図3に示すように、電流を構成する正電荷と負電荷が同じ大きさの速度 v_0 で互いに反対方向に運動しているモデルを提示している。この系で電荷中性の式(1)が成り立つと仮定されている。速度 V で平行に運動する試験電荷 q に働く力 F が前章で述べた思考実験と同様に導かれ、ローレンツ力が矛盾なく説明されている。ここで、正電荷と同じ速度で運動する系から観測した場合、電場が発生することになる。つまり、正電荷が静止して見える系では、電子の運動による電流で電荷中性が崩れ電場が発生する。パーセルは、金属導体に電流が流れている場合は、実験系では電荷中性が実現されており、図3のモデルを適用できないとしている。

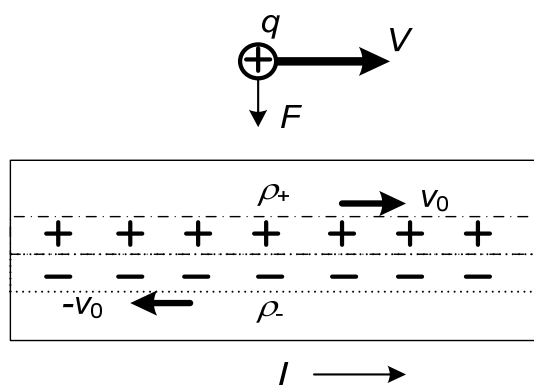


図3. パーセルの電流・電荷モデル^[1].

そこで、電流が流れている金属導体で電荷中性が保たれているか、について再考してみる。これまでの文献では、金属導体に電流を流した状態で実験系では近傍に電場は観測されないの、電荷中性が保たれているとしている。しかし、電子が運動しても中性が保たれる機構は何かについて、明確な記述はない。2章で電子の運動による電場のゆがみについて述べたように、単純に電場が発生すると考

えてよいのではないか。問題はその大きさであり、またその観測手段であると考える。電流が流れることによる電荷中性からのずれは、 $v \ll c$ のとき(4)式より、

$$\Delta\rho_- \cong \frac{v^2}{2c^2} \rho_0 \quad (8)$$

である。以前の報告^[5]でも述べたが、銅などの通常の金属では電子のドリフト速度は mm/s 程度と微小であり、その効果を観測することが困難である。現状では有効な実験手段を見いだせていない。

3. 2 電磁誘導について

マックスウェルの方程式として定式化されている電磁誘導の法則を、ローレンツ力から説明することが行われている。図4に示すように、電流 I が流れている直線導体があり、その近傍に置かれた導体リング（ここでは正方形を仮定）があり、このリングが導線に対し垂直方向に速度 v で運動しているとする。導体リング内の電荷にはリングに沿ってローレンツ力 F_1 , F_2 が働き、1周にわたって線積分すると周回電場が求まる。リングの速度方向の部分にもローレンツ力が働くが、起電力には寄与しない。リングが導線に平行に運動する場合、ローレンツ力は打ち消し合い起電力は発生しない。リングの移動に伴ってリングを貫く磁束が変化すると起電力が発生することになる。これが電磁誘導のローレンツ力による説明である。2章で述べた思考実験を適用し、導体リングと等速で運動する系から観測してみる。その系では導体リングが静止し、電流が流れている導線が速度 $-v$ で運動する。それに伴い電場が発生し、導体リングを周回する起電力が発生する。このように、電磁誘導による起電力を電場の発生で定性的に説明することができる。

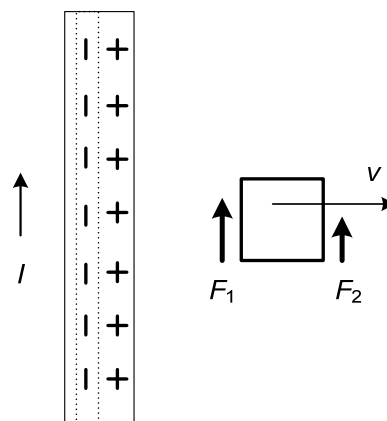


図4. 電流が流れる導体近傍で運動する導体リング.

次に、導線と導体リングを固定し電流を変化させた場合を考える。起電力 \mathcal{E} は導体リングを貫く磁束 N の時間変化で与えられ、

$$\phi = -\frac{dN}{dt} \quad (9)$$

である。電流のみを変化させても磁束が変化し同様な電磁誘導効果が得られることは、トランスを持ち出すまでもなく明らかである。電流の変化は導体内の電子のドリフト速度の変化である。金属導体に電流が流れる場合、常に電荷中性が成り立つモデルでは、起電力を説明することができないと考えられる。電流があれば電荷中性が崩れ電場が発生するモデルでは、起電力を説明できる可能性がある。しかし、単純に電子の速度が電流に比例して増大し(4)式により電荷密度が増大するとした場合、(9)式の起電力を導出することはできない。電流を時間的に変化させることは加速度運動になるため、(4)式をそのまま適用できない。また、加速度運動する点電荷の作る電場は図 2 とは異なり電磁波の放射を伴う。(9)式の物理的な意味を相対論から説明可能か、今後の検討が必要である。

4. 磁力について

2本の平行な直線上導線に電流が流れている場合、導線間にアンペール力が働く。単位長さ当たりの力 \mathbf{F} から磁場(磁束密度) \mathbf{B} が定義されており、電流ベクトル \mathbf{I} として以下の式が与えられている。

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} \times \mathbf{B} \quad (10)$$

キャリアの線密度を ρ 、速度ベクトルを \mathbf{v} とすれば、

$$\mathbf{I} = \rho \mathbf{v} \quad (11)$$

であるから、2本の導線に流れる電流が同じであれば力の大きさは導線間の距離を r として、

$$F = \left(\frac{\rho^2}{2\pi\epsilon_0 r} \right) \left(\frac{v^2}{c^2} \right) \quad (12)$$

で与えられる。これは2章で行ったと同様の思考実験でも導出される。アンペール力は、電荷中性が図 1 の場合も図 3 の場合も同じ結果になることが確認されている^[1, 3]。右辺の左のカッコ内は直線状に電荷が分布した場合のクーロン力と等しい。アンペール力はクーロン力に対して $(v/c)^2$ 倍となっており、磁場が相対論的な効果であることを暗に示している。直径 1 mm の銅線に 1 A の電流を流した場合には $(v/c)^2 = 10^{-25}$ となり、微小である。1 m 離れた 2 本の導線にそれぞれ 1 A の電流を流した場合、アンペール力は 2×10^{-7} N であり重力に換算すると 0.02 mg 重である。その測定には高精度の装置が必要であるが、アンペールはどのような実験でこの力を発見したのか興味もたれる。アンペール力はローレンツ力として一般化されている。磁力として観測される力は、このローレンツ力に起因している。相対論的な効果から出現する微弱な力が観測されるのは、電荷中性によりクーロン力がスクリーニングされている

ためとされている^[2]。磁力が現実的な力として観測される他の要因として、磁性体の存在を指摘する。コイルやモーターなど磁性体がなければ微弱な作用にとどまる。磁性体の発現には電子の光速に近い回転運動が関係しており、相対論的な効果が現れる所以である。

5. おわりに

ファインマンらの著書^[2]にある思考実験について、一般的に適用できるか、という疑問は、太田の著書^[3]を読みパーセルの著書^[1]を知ったことで解消された。ローレンツ力を説明する電流と電荷の思考実験について、ファインマンよりもパーセルの著書の方が 1 年早く出版されていたが、著者は不勉強であった。金属導体に電流があっても常に電荷中性が保たれることに対する疑問は、電磁誘導を考えるとさらに深くなった。おそらく電流があることで電荷中性が崩れていると考えるが、これを実証する手段を見いだせていない。また、電流のみを変化させたときの電磁誘導を相対論から説明可能か、という新たな疑問が生まれた。相対論的な効果である磁力が強大な力になって出現するが、それは磁性体の寄与が大きいことを指摘した。

謝辞

以前報告した拙文がウェブ上で紹介されていることを知らせていただき、その内容について再考するきっかけを与えていただいた恩地 豊志氏に感謝します。

参考文献

- [1] E. M. Purcell, "Electricity and Magnetism," sec. 5.9-6.1, MCGRAW-HILL BOOK COMPANY, 1963.
- [2] R. P. Feynman, R. B. Leighton, and M. Sands, "Lectures on Physics," vol. II, sec. 13.6-13.11, ADDISON-WESLEY PUBLISHING COMPANY, 1964.
- [3] 太田浩一, "電磁気学の基礎II," 15 章, シュプリンガー・ジャパン, 2007.
(2章の思考実験は、その他の文献にも記述されている.)
- [4] 佐藤憲史, "ローレンツ力と磁場," 沼津工業高等専門学校研究報告, 第 42 号, pp. 27-32, Jan. 2008.
- [5] 佐藤憲史, 井石雄太, "静止系におけるローレンツ力の実験的検証," 沼津工業高等専門学校研究報告, 第 43 号, pp. 37-42, Jan. 2009.