

# 静止系におけるローレンツ力の実験的検証

佐藤 憲史\*<sup>1</sup>, 井石 雄太\*<sup>2</sup>

## Experimental Study of Lorentz Force in a Stationary Frame

Kenji Sato\*<sup>1</sup> and Yuta Iseki\*<sup>2</sup>

### Abstract

Lorentz force is an important concept in electromagnetism. When an electric current is flowing in a wire, magnetic field is generated around the wire. Lorentz force acts on a moving charge near the wire. It is known that the Lorentz force can be derived from the Lorentz contraction of electrons and metal ions in the wire. If the charge is stationary with the wire, the Lorentz force is zero on the charge. However, the moving electrons in the wire induce Lorentz force due to the Lorentz contraction of electrons. The purpose of this paper is to experimentally investigate the Lorentz force from the Lorentz contraction of electrons. The Hall element is used to measure the Hall voltage when the control current into the Hall element is zero. The results show that the effect of Lorentz contraction of electrons in the wire is not observed due to thermal effects.

**Key Words:** Lorentz force, Lorentz contraction, Hall effect, relativity

### 1. はじめに

ローレンツ力は、電流や磁場を定義する基本的な物理量である。電磁気学の教科書では、ローレンツ力は磁場中で運動する電荷に働く力として、電氣的なクーロン力とは無関係に、いわば「天下り」的に導入され、その起源について明確に記述されているとは言い難い。

一様な磁場がありこれに直交する方向に電荷が一定速度で運動していると、ローレンツ力が働き、電荷は円軌道を描く。しかし、電荷と同じ速度で動く座標系で電荷を観測すると電荷は静止しており、ローレンツ力は働かないので静止したままと観測されることになる。この矛盾に対して、ファインマンは物理の教科書で、磁場を発生させる電流を構成する電荷のローレンツ収縮から電氣的な力が発生し、電荷とともに動く座標系でもローレンツ力と同じ力が発生することを示している[1]。

では、一様な磁場中で静止している電荷を、磁場に垂直方向へ一定速度で動く座標系から観測するとどうなるか。電荷は一定速度で動いて見え、ローレンツ力が働くので円軌道を描くことになる。この矛盾は、動く座標系ではローレンツ収縮による電場が発生し、ローレンツ力が打ち消されることで解決される。このように、電場や磁場は観測する系によって全く異なって見える。電場や磁場は、ある座標系のある地点である時間に測定して決められ、電場はその座標系に静止した単位電荷に働く力として定義される。点電荷が静止していればその周りにできる電場はクーロン場である。しかし、電荷に対して並進運動する系から電場がどのように見えるか。静止系での電気力線がそのまま、並進運動しているように見えるわけではない。また、ある電磁場中で運動していると見える電荷にはどのような力が働くか。この場合、電荷のある場所での電場によるクーロン力と、ローレンツ力を考慮する必要があるが出てくる。電磁気学は、このよ

\*1 電気電子工学科 Department of Electrical and Electronics Engineering

\*2 福島大学 Fukushima University

うに, 本質的に相対性理論を包含している。「相対論的な効果は運動速度が光速に近づくと顕著になるが, 通常速度では考慮する必要がない」という見方は, 誤解である。

我々は, 電磁場のローレンツ変換によってローレンツ力を導出し, 電流の流れる導線に対して静止した電荷においてもローレンツ力が存在する可能性を示した[2]. ローレンツ力をローレンツ収縮によって説明しているこれまでの文献では, 電流を構成する自由電子が等速運動するとき電子密度は同じ導線中の金属イオンと同一と考えている[1, 3, 4]. つまり, 導線に固定された系から見ると“自由電子はローレンツ収縮を起こさない”ことを仮定している. このように仮定することで, “外部にある電荷が導線に対して静止している場合, ローレンツ力は働かない”ことが導出される. ある一定の電流が流れている状態において金属イオンと自由電子の密度が同一であると仮定することは可能である. しかし, “自由電子が常に同一の電荷密度を持つ”ことは保証されない. 電流がなく磁場も電場もない状態を出発点とし, 電流を流すと自由電子がローレンツ収縮して電場が発生すると考える方が単純である. このような考え方に立てば, 導線に対して静止した電荷にも, 導線中の電流によりローレンツ力が働くことになる. 以上の議論を明確にするために, 電流が流れる導線に対して静止している電荷に働く力を実験的に検証することが, 本研究の目的である。

静止している電荷に働くローレンツ力を検証するため, ホール素子を用いる. ホール素子では半導体中におけるキャリアに働くローレンツ力によって電荷分布が偏在し, ホール電圧として観測される. 上述した理論によれば, 半導体中のキャリアが静止していても近傍にある導線中を流れる電流によりローレンツ力が働き, ホール電圧が検出されることになる.

第 2 章で, ローレンツ力をローレンツ収縮から導出する理論の概要を述べる. 第 3 章では, ホール素子を用いて静止した電荷に働くローレンツ力の検証法を示し, 第 4 章で実験に用いたホール素子の特性を述べる. 第 5 章で, ローレンツ力の検証実験結果を述べ, 第 6 章において考察する.

## 2. ローレンツ力とローレンツ収縮

図 1 に示すように, 電流  $I$  が流れている導線と, その近傍にあり電荷  $q$  で帯電している金属球を考える. 金属球は, 導線に平行に運動しており, その速度を  $v$  とする. この座標系では導線が静止しており, 導線静止系 ( $K$  系) とよぶ.

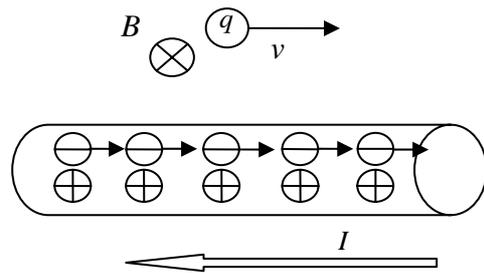


図 1. 導線静止系 ( $K$  系).

導線を通る電流により, 磁場が発生し, 金属球は移動速度に応じたローレンツ力を受ける. 磁束密度を  $\mathbf{B}$  とすれば, ローレンツ力  $\mathbf{F}$  は,

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (1)$$

で与えられる. この力によって, 金属球の軌道が曲げられる.

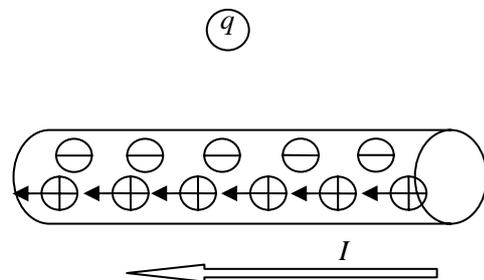


図 2. 金属球静止系 ( $K'$  系).

次に, 図 2 に示すように, 金属球と共に等速運動する座標系 ( $K'$ ) を考える. この系では, (1) 式で与えられるローレンツ力はゼロであり, 金属球は静止したままである.  $K$  系と  $K'$  系という 2 つの慣性系において, 金属球に働く力が異なることは矛盾である. この矛盾に対して, 文献[1]に述べられたローレンツ力を導出する理論の概要は以下のようなものである.  $K$  系では導線が左方向に運動していることになり, 導線内の金属イオンが運動している. (電子は  $K$  系で金属球と同じ速度を持つと仮定している.) このため, ローレンツ収縮が起こり, 金属イオン密度が電子密度より高く観測されるため, 金属球は電気的なクーロン力を受ける. そのため,  $K$  系と  $K'$  系で, 金属球は同じ力を受けることが導かれる.

この考え方を  $K$  系で金属球が静止している場合に当てはめる. 図 1 において, 静止している金属球から見て, 導線内の電子は電流と逆向きに運動しており, ローレンツ収縮を起こして電子密度が高くなり電気的な力が発生する. 導線内電子の速度を  $v_e$  とすれば, 金属球に働く力  $\mathbf{F}_e$  は,

$$\mathbf{F}_e = -\frac{1}{2}q\mathbf{v}_e \times \mathbf{B} \quad (2)$$

で与えられる[2]. 従来の文献では, 導線内では電流が流れても

電荷中性が成り立つとし, (2)式で与えられる力は考慮されてこなかった. しかし, 電流がゼロの時, 電荷中性が成り立つのであって, 電流が存在する場合, 電荷中性は保証されない. (2)式によるローレンツ力を実験的に検証するため, 以下に述べる実験を行う.

### 3. ホール素子による検証法

前章で述べた理論を実験的に検証するため, ホール素子を用いる. ホール素子は固体のホール効果を応用したものであり, 磁気センサとして広く用いられている. ホール効果とは, 固体に電流を流し, 固体表面に垂直に磁場を加えたとき, ローレンツ力によって, 電流と磁場に垂直な方向に電圧が発生する現象である. ホール素子の基本構造を図3に示す. ホール素子には, ホール効果の大きい半導体を用いられる. 入力端子①-③に制御電流  $I_c$  を流し, 磁場を垂直に加えると半導体内部のキャリアの進行方向がローレンツ力により曲げられ, キャリア分布が偏在することから, 出力端子②-④間で電位差が発生する. この電位差がホール電圧  $V_H$  と呼ばれる. ホール電圧は一般に次式で表わされる[5].

$$V_H = \frac{R_H}{d} \cdot I_c \cdot B \cos \theta + R_e \cdot I_c \quad (3)$$

ただし,  $R_H$  はホール係数,  $d$  は素子の厚さ,  $B$  は磁束密度の大きさ,  $\theta$  はホール素子に入射する磁場の傾き (図3では  $\theta=0$ ),  $R_e$  は不平衡係数を表す. 右辺の第1項は信号電圧, 第2項は不平衡電圧である. ホール電圧は制御電流と磁場に比例する. また, 半導体の移動度が大きいほど生じるホール係数が大きい. 不平衡電圧は, 磁場が存在しない場合でも生じる電圧で, ホール素子パターンアンバランス, 電流の不均一性によって生じると考えられている.

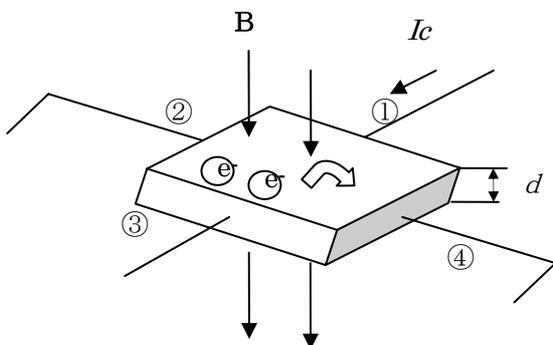


図3. ホール素子の基本構造.

ホール素子内のキャリアは, 図1における金属球と考えることができる. ホール素子近傍に導線を配置し, 電流を流すことで

磁場を発生させる. ホール素子では制御電流を流し, キャリアをドリフトさせることで, 外部から発生される磁場を測定できる. (2)式で与えられる力が存在すれば, ホール素子に制御電流を流さなくとも近傍の導線に流れる電流により, ホール電圧が発生することになる.

以下に, そのホール電圧のおよその値を見積もる. 導線の断面積を  $S$ , 電子密度を  $n$ , 電荷素量を  $e$ , この導線に流れる電流を  $I$  とすれば, 導線内を移動する電子速度  $v$  は次式で表わされる.

$$v = \frac{I}{enS} \quad (4)$$

銅でできた直径 1 mm の導線中に 1 A の直流電流が流れる場合を考える. 銅における値 ( $n = 8.47 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}$ ) を用いると, 電子速度は,  $9.36 \times 10^{-5} \text{ m/s}$  程度と見積もられる.

これに対して, 半導体内の電子の速度  $v_s$  は, 移動度を  $\mu$ , 加える電場を  $E$  とすれば, 次式で表わされる.

$$v_s = \mu E \quad (5)$$

用いたホール素子の半導体の移動度を  $78000 \text{ cm}^2/\text{Vs}$ , 電場を  $3.3 \text{ kV/m}$  とすれば, 半導体内のキャリア速度は,  $2.6 \times 10^4 \text{ m/s}$  となる. 以上から, 導線内の電子は非常に遅く, 半導体内のキャリア速度に対して 9 ケタ程度小さいことが, 計算から見積もられた. ローレンツ力は電荷の速度に比例しており, ホール電圧も電荷の速度に比例する. このことから, ホール素子内のキャリアを静止した状態で観測されるホール電圧は, 外部導線に流す電流の電子速度に比例して 9 ケタ程度小さくなり, 観測が非常に困難であることが予想される. そのため, 本実験では, 導線を細くすること, コイル状に巻いて導線の本数を増やすことを試みる.

### 4. ホール素子の特性

ホール素子として, 旭化成エレクトロニクス株式会社の HW-101A を用いた. このホール素子は, 半導体中最大の移動度  $78000 \text{ cm}^2/\text{s}$  を持つ InSb を使用しており, 高感度な磁気センサである. ホール素子の基本特性を評価する実験の構成図を図5に示す.

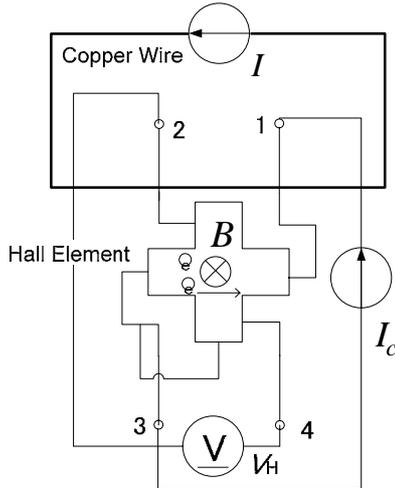


図5. ホール素子特性評価回路.

ホール素子入力端子（1－3間）に電流源を接続し、ホール素子に制御電流を加える。出力端子（2－4間）に電圧計を接続し、ホール電圧を測定する。ホール素子近傍（素子のセンサ部から2.3 mm）に直径0.5 mmのエナメル線を配置し、電流源を接続する。エナメル線を通る電流によって発生した磁場が、ホール素子に加えられる。エナメル線に通る電流  $I$  により、距離  $r$  に生じる磁束密度  $B$  は、真空の透磁率を  $\mu_0$  として、次式で与えられる。

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (6)$$

ホール素子の制御電流を一定 ( $I_c = 5 \text{ mA}$ ) とし、エナメル線に通る電流  $I$  を0から1 Aまで変化させた。測定結果を図6に示す。

このホール素子のキャリアは、電流の向き等を考慮すると電子であることがわかる。この図の上辺の軸は、(6)式から見積もった磁場の大きさである。導線に通る電流（磁場）に対するホール電圧の直線性が良いことがわかる。地磁気は  $30 \mu\text{T}$  程度であるが、地磁気の10%程度の小さい磁場が測定可能であり高感度である。導線に通る電流がゼロのとき、つまり、磁場がゼロの時、1.2 mVのホール電圧が観測されているが、これは不平衡電圧である。次に、エナメル線に通る電流を一定とし、ホール素子に通る制御電流を変化させたときのホール電圧の値を測定した。結果を図7に示す。導線に通る電流を  $I = 0, 1, 5 \text{ A}$  とし、異なる磁場で測定している。磁場がゼロの場合のホール電圧は不平衡電圧である。制御電流に対するホール電圧の変化が直線からずれているが、これは移動度のキャリア密度依存性のためと考えられる。

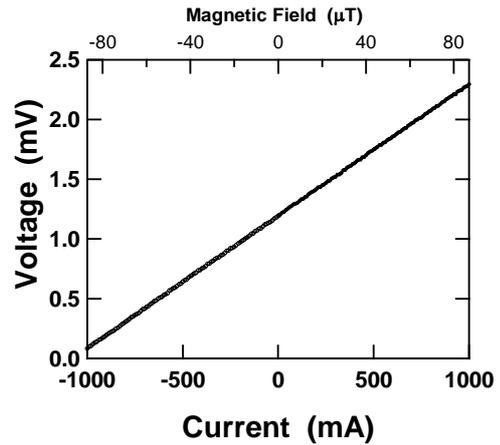


図6. ホール素子の特性. 外部導線に通る電流を変化させたときのホール電圧.

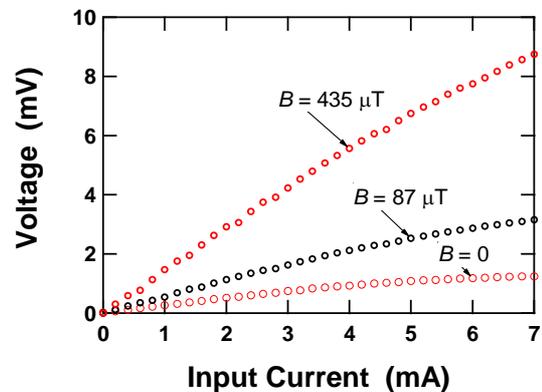


図7. ホール素子の特性. ホール素子に通る制御電流値に対するホール電圧. 外部導線に通る電流を変え異なる磁場で測定している。

以上2つの予備実験により、製作した測定回路のホール素子が正常に動作していることが確認できた。

## 5. 実験結果

(2)式で与えられる力が存在すれば、ホール素子に制御電流を流さなくとも近傍の導線に通る電流により、ホール電圧が発生することになる。これを検証するために、図5において、入力端子である1－3間を開放し、制御電流が存在しないときのホール電圧を測定する。ホール素子に磁場を加えるための導線は100回巻いたコイルとし、コイルの一部を直線状にしてホール素子近傍に設置した。実験に用いたホール素子とコイルの写真を図8に示す。100回巻コイルを使用することで、ホール素子に加える磁場を増やした。また、コイルの製作には、直径0.1 mmの細線銅線を用いた。細線を用いることで流れる電子の速度を増大させることができる。磁場はコイルの巻き数に比例し、電子速度は断面積に反比例することから、2章で見積もった値より合計4ケタの向上が見込める。しかし、ホール素子に

電流を流す通常の場合に比べ、5ケタのオーダーでホール電圧が小さく、10 nV 程度であることが予想される。

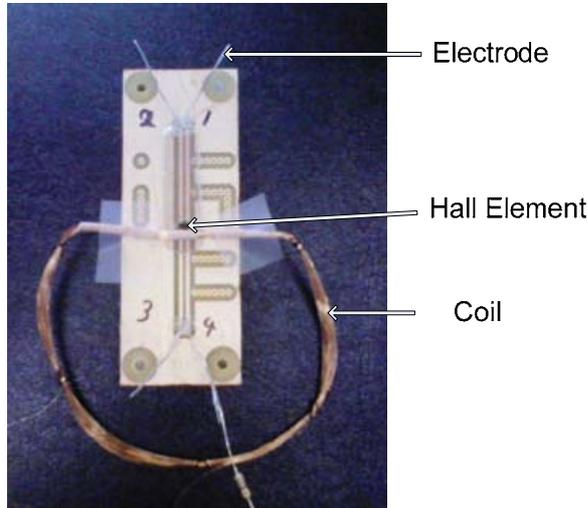


図 8. ホール素子に 100 回巻きコイルを配置した写真.

100 回巻きのコイルに電流を流してみたところ、図 9 に示す結果が得られた。ここで、ホール素子に流す制御電流はゼロであり、横軸は、コイルに流す電流である。図中の曲線は、電流のべき乗で回帰分析した結果であり、2.5 乗の依存性が観測された。(2)式によるローレンツ力が存在すれば、電流に対して電子速度と磁場が比例して増えることから、ホール電圧は、電流の 2 乗で増えることになる。図 9 の結果は、理論的な予測に近い傾向を示している。しかし、ホール電圧の値は、予想よりも 4 ケタ程度大きな値である。また、ホール電圧の応答が極めて遅いことが観測された。

図 10 は、コイルに流す電流をオフにした場合のホール電圧の時間変化を測定した結果である。初期のコイルに流す電流は 200 mA である。観測された電圧は、時間について指数関数的に減少している。この図から、ホール電圧の緩和時間は 12 秒と見積もることができる。この結果から明らかなように、観測されたホール電圧は熱的な効果によるものと考えられる。

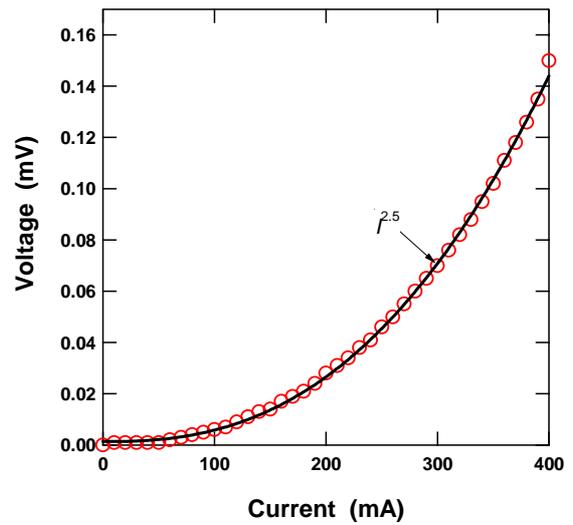


図 9. ホール素子に制御電流を流さない時のホール電圧. 横軸は外部コイルに流す電流である.

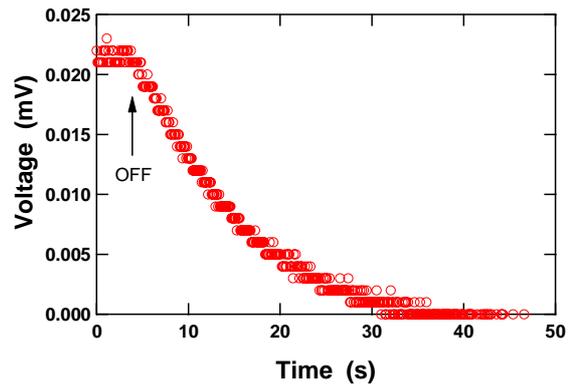


図 10. 外部コイルに流す電流を 200 mA からオフにしたときのホール電圧の時間変化.

## 6. 考察

実験結果から、観測された電圧は、コイルの電流について 2 次曲線に近い変化を示すことが確認できた。しかし、測定された電圧は見積もりより 4 ケタ程度大きい。コイルの抵抗値を測定した結果 62 Ω あり、電流を流すと電流の 2 乗に比例したジュール熱を発生する。その結果、ホール素子近傍に温度勾配が生じ、熱起電力が発生したと考えられる。この細線導線に 1 A の電流を流すと線は焼き切れた。また、測定中、電子装置用ファンを用いてホール素子を空冷すると、測定電圧の低下が見られた。ホール電圧の磁場に対する応答は、半導体中のキャリア走行時間程度(10 ns のオーダー)に高速と考えられる。しかし、図 10 から緩和時間は 12 秒と極めて遅く、熱的な効果が支配的である。

磁場を発生するための電流により発熱する。この発熱の影響を抑圧できた場合でも、ホール素子自体の熱雑音を考慮する必要がある。熱雑音電圧  $e_n$  は、

$$e_n = \sqrt{4kTR\Delta f} \quad (7)$$

で与えられる。ただし、 $k$  はボルツマン定数、 $T$  は絶対温度、 $R$  はホール素子の抵抗、 $\Delta f$  は周波数帯域である。ここで、 $T=300$  K、 $\Delta f=1$  Hz とする。また、測定されたホール素子の抵抗、 $R=300$   $\Omega$  を用いると、熱雑音電圧は、2.2 nV である。これは、前章で見積もったホール電圧よりも 1 ケタ程度小さな値である。このことから、熱雑音電圧が測定限界とはならない。ただし、10 nV 程度の微小電圧の測定は極めて困難である。

以上の結果は、(2)式で与えられる静止系でのローレンツ力が測定上ほとんど問題にならないことを意味している。この要因は、導線内の電子速度が非常に小さいことにある。半導体中の電子速度は大きく、ホール素子とともに電流を流すパスを半導体基板上に作成すれば測定できる可能性がある。また、現実の半導体素子等において、(2)式で与えられるローレンツ力による効果が出現しないか、検討する必要がある。

## 7. おわりに

導線中を流れる電流を構成する電子のローレンツ収縮によるローレンツ力を、ホール素子を用いて検出する方法と実験結果についてのべた。本実験系では、理論的にホール電圧は 10 nV 程度と見積もられた。しかし、より大きな熱的効果が出現し、静止した電荷に働くローレンツ力を実験的に検証するには至らなかった。

本研究は、平成 19 年度卒業研究として取り上げ、当時、電気電子工学科 5 年に在籍した井石が担当したテーマである[6]。電気電子工学科では 4 年次の「電磁気」の授業で、文献[3]を教科書として用いた。この教科書では、文献[1]と同様に、ローレンツ収縮によりローレンツ力が導出できることを述べている。しかし、その説明は、学生にとって難解と思われた。卒業研究では、文献[7]等を参考に特殊相対性理論を理解し、ローレンツ力がローレンツ収縮によるものであることを実験的に検証することを試みた。ホール素子は、ローレンツ力によって発生するホール電圧を測定するものである。ホール素子の制御電流がない状態でホール電圧が観測できれば、ローレンツ力がローレンツ収縮によるものであることを実験的に検証することになる。この可能性をさらに追及していきたい。

## 謝辞

ホール素子をご提供いただいた旭化成エレクトロニクス株式会社に感謝します。

## 参考文献

- [1] R. P. Feynman, R. B. Leighton, and M. Sands: Lectures on Physics, vol. II, pp. 13.6-13.11, ADDISON-WESLEY PUBLISHING COMPANY, 1964.
- [2] 佐藤 憲史: ローレンツ力と磁場, pp. 27-32, 沼津工業高等専門学校研究報告 第 42 号, 2008.
- [3] 後藤 尚久: 電磁気学, コロナ社, 2002.
- [4] 松田 卓也, 木下 篤哉: 相対論の正しい間違え方, pp. 105-110, 丸善, 2001.
- [5] 谷腰 欣司: 磁気センサとその使い方, 日刊工業新聞社, 1986.
- [6] 井石 雄太: 電気力としての磁力とローレンツ力の検証, 平成 19 年度沼津高専卒業研究報告, 2008.
- [7] 竹内 建: 数式いらず! 見える相対性理論, 岩波書店, 2005.