

ローレンツ力と磁場

佐藤 憲史*

Lorentz Force and Magnetic Field

Kenji Sato*

Abstract

Lorentz force plays important roles in electro-magnetic dynamics. It can be derived from Lorentz transformation of electrical fields. Electrical currents in wires are electrons in motion, where metal ions in wires are not moving. The charge density of the electrons in motion changes due to Lorentz contraction. The difference of the charge density between electrons and ions provides an electrical field. This is an origin of Lorentz force. It is pointed out that Lorentz force acts on electrons even if the electrons are not moving in a magnetic field. The Lorentz contraction of electrons in wires is discussed.

Key Words: Lorentz force, Lorentz contraction, magnetic field, relativity

1. はじめに

電磁気学は、工学における重要な基礎科目の一つである。電磁気学の内容は、理路整然とした体系をなしており、基本的には 100 年以上前に確立された古典的な理論である。しかし、学生にとっては分かりにくい分野であり、修得が不十分な場合も見受けられる。電磁気学を難しくしている要因の一つに、ガウスの定理などベクトル解析があげられる。静電界の問題は、電位が力学における位置エネルギーに相当しており、物理的には理解しやすい。3次元ベクトル解析、特に面積分や3次元の偏微分表現などの数学的手法を習熟できれば比較的わかりやすい内容といえる。

電磁気学が難しいといわれる大きな要因は、電場、電束密度、磁場、磁束密度の 4 つの物理量があり、それらの間に、アンペールの法則、フレミングの左手の法則、など多様な法則が出現することにあると言われている[1]。これまで、電磁気学に関する教科書が多数出版されている。その内容の基本はマックスウェルの方程式であり、磁束密度の時間変化が電場を発生させ、電束密度の時間変化が磁場を発生させる、ということが述べられている。一見対称に見える電場と磁場の関係であるが、磁場の発生には電流が関係してくる。導線回路(あるいは磁石)を運動させると起電力が生じることは、ローレンツ力により説明される。しかし、このような物体の運動による起電力と磁束密度の時間変化による電磁誘導がまったく同じ形式にまとめられる理

*電気電子工学科

Department of Electrical and Electronics Engineering

由は述べられていない[2]. そもそも, ローレンツ力がなぜ生じるかは説明されていない. 電束密度の時間変化である変位電流が磁場を発生させるということは, 直感的に捉えにくい. また, 電場と電束密度, 磁場と磁束密度という, 似通った物理量が用いられることも理論を複雑にしている. 運動方程式で簡潔に記述できる力学に比べ, 電磁気学は原理的, 論理的に理解することが容易ではない. 電磁気学を, より原理的に理解することを目指した教科書として, ランダウ・リフシッツによる『理論物理学教程』の中の「場の古典論」[3]がある. この教科書では, 特殊相対性理論 (以下, 相対論と略す) に基づいた運動論から出発している. 電磁気学の基本は電荷の存在とその運動にあり, 相対論が深く関わっている. 通常の教科書では, 相対論は後の方で述べられるのであるが, 相対論から出発した方が論理的な理解が得られ, 記述も簡潔になる. しかし, 「場の古典論」は, 初学者が容易に理解できるものではない. 後藤は, 電磁気学を論理的にわかりやすくするため, クーロン力を基本的な原理として教科書を展開しており, ローレンツ力をクーロン力から導出している[1]. ローレンツ力は, 次章で述べるように, 電流と磁場を決める重要な物理量である. ローレンツ力は, 電荷の運動に伴うローレンツ収縮によって, 電場が変化するために現れる力として説明される. これは他の文献にもある説明であり, 相対論が身近な現象に現れる例とされている[4, 5]. これらの文献では, 直線電流を構成する電子と同じ速度で運動する外部の電荷を仮定する思考実験からローレンツ力が導出される. 本報告では, ローレンツ力をローレンツ変換から一般的に導出する. その結果, 電荷が静止していてもローレンツ力が存在する, という結論が得られる. これは, ローレンツ力は磁場中で電荷が運動することで初めて働くとする従来の常識と異なっている. ローレンツ力をローレンツ収縮によって説明している文献においても, 電荷が静止している場合ローレンツ力は働かないことが述べられている. 本報告では, 磁場が電子の運動によるものであることから, 電荷が静止していてもローレンツ力が存在すると考えた方が合理的であることを示す.

第 2 章で, 電流と磁場という基本的な物理量とローレンツ力の関係を簡単に整理する. 第 3 章で電磁場のローレンツ変換について述べ, 第 4 章でローレンツ力をローレンツ変換から導出し, 電荷が静止していてもローレンツ力が存在することを示す. その結論の真偽と物理的な意味を, 第 5 章において考察する.

2. 電流と磁場の定義

電流の単位であるアンペアは, 国際単位系では, “真空中に 1 メートルの間隔で平行に配置された無限に小さい円形断面積を有する無限に長い 2 本の直線状導体のそれぞれを流れ, これらの導体の長さ 1 メートルにつき 2×10^{-7} ニュートンの力を及ぼしあう一定の電流” と定義されている. また, 磁場 H は, 一定の磁場中に置かれた直線状導体にある一定の電流 I を流したとき導体に働く力を F とし, 以下の関係式によって定義される.

$$F = I \times \mu_0 H \quad (1)$$

ただし, μ_0 は真空の透磁率である. このように, 電流と磁場という基本的な物理量はローレンツ力によって決められており, 電荷間に働くクーロン力とあわせてローレンツ力は, 電磁気的な相互作用の基本となっている. 電荷間に働くクーロン力は, 重力とともに, 素粒子間に働く根源的な相互作用とされる. 重力やクーロン力とは異なり, ローレンツ力は, 電荷の運動に関連して出現する 2 次的な力と捉えることができる. これを, 3, 4 章で示す.

3. 電磁場のローレンツ変換

これまでいくつかの文献で述べられているローレンツ力の導出を, より一般化してローレンツ変換を用いて行う. ローレンツ力は電荷の運動に関係している. しかし, 電荷の運動に伴う電磁場の変化は, 例えば, 点電荷が等速運動すると電磁場がどのようになるかという基本的な問題でさえ解法が極めて難しい. 砂川による「理論電磁気学」[2]には, この問題を, マックスウェルの方程式から直接導出することと, 相対論に基づいてローレンツ変換から導出することが述べられ, 同じ結果が得られることが示されている. 後者のローレンツ変換を用いれば導出は極めて簡潔であり, 複雑な問題にも応用しやすい. 前提条件として, 電場はある座標系があつて, その系に静止した単位電荷に働く力として定義される. 運動する電荷に働く力を直接計測することは不可能であり, 電場はある座標系に静止して観測しるとする.

図 1 に示すように, ある座標系 K において, 電場 E と磁場 H が与えられているとする. この座標系の x 軸方向に速度 v で等速運動する系 K_0 における電場 E_0 と磁場 H_0 は, 以下のローレンツ変換で与えられる[3].

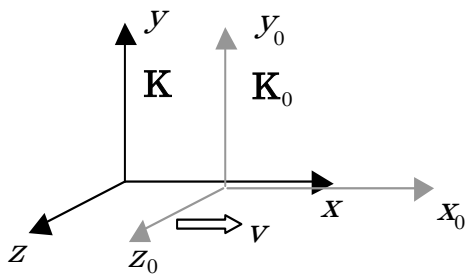


図 1. ローレンツ変換における座標系.

$$\left. \begin{aligned} E_{0x} &= E_x \\ E_{0y} &= \frac{E_y - v\mu_0 H_z}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ E_{0z} &= \frac{E_z + v\mu_0 H_y}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} H_{0x} &= H_x \\ H_{0y} &= \frac{H_y + (v/c^2)E_z / \mu_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ H_{0z} &= \frac{H_z - (v/c^2)E_y / \mu_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

ただし, c は真空中の光速である.

ローレンツ変換を用いて, 図2に示すように, x 軸上に電荷線密度 $e\rho$ で一様に電荷が分布している場合の電磁場を導出する. ただし, e は, 電気素量である. この電荷が点 (x, y, z) に作る電場 E_0 は, 電荷が静止している場合, 真空の誘電率を ϵ_0 として,

$$\left. \begin{aligned} E_{0x} &= 0 \\ E_{0y} &= \frac{e\rho y}{2\pi\epsilon_0(y^2 + z^2)} \\ E_{0z} &= \frac{e\rho z}{2\pi\epsilon_0(y^2 + z^2)} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

で与えられ, 磁場は存在しない.

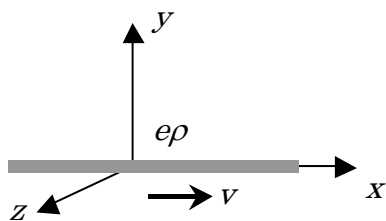


図 2. x 軸上に電荷線密度 $e\rho$ で一様に電荷が分布した系.

この電荷が x 軸上に等速度運動すると, 電場が変化し, 磁場が発生する. 電荷が等速度運動する現象を, 電荷と同じ速度で運動する系から観測すれば電荷は静止して観測され, この系の電場は(4)式となり磁場は存在しない. 電荷が速度 v で等速運動していると観測される系は, 電荷が静止した系からみると $-v$ で等速運動する系であり, これらの系の上に電磁場のローレンツ変換が成り立つ. これを用いて, 電荷が等速運動していると観測される系における電磁場は,

$$\left. \begin{aligned} E_x &= 0 \\ E_y &= \frac{e\rho y}{2\pi\epsilon_0\sqrt{1 - v^2/c^2}(y^2 + z^2)} \\ E_z &= \frac{e\rho z}{2\pi\epsilon_0\sqrt{1 - v^2/c^2}(y^2 + z^2)} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} H_x &= 0 \\ H_y &= \frac{e\rho v z}{2\pi\mu_0\sqrt{1 - v^2/c^2}(y^2 + z^2)} \\ H_z &= \frac{-e\rho v y}{2\pi\mu_0\sqrt{1 - v^2/c^2}(y^2 + z^2)} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

となる. (6)式は, $e\rho v$ を電流とみなしビオサバウルの法則から磁場を導出した結果に比べ, $1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ の因子だけ異なっている. これは, ローレンツ収縮によって電荷密度が $e\rho/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ に増大したことを意味している. 電場の式(5)についても同様に, 電荷密度が $e\rho/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ に増大した結果となっている. 直線電流 $e\rho v$ が作る磁場は, 通常, この因子を無視しており, 電荷の速度が光速に比べて小さい ($v \ll c$) という条件の下での近似である.

4. ローレンツ力の導出

これまでいくつかの文献で述べられているローレンツ力の導出では, 電流が流れる直線導体と外部の電荷をとりあげている. 図3に示すように, 無限に長い直線状導体があり, 正(+) ρ の電荷を持つ金属イオンと負(-) ρ の電荷を持つ自由電子が同じ線密度 ρ で一様に分布しているという例を考える. これは, 銅線などに電流を流した場合のモデルである. ここで, 導体, つまり, 金属イオンが固定された系を K_0 とする. 金属イオンと自由電子の両方の電荷が静止した状態では, 電場も磁場も発生しない.

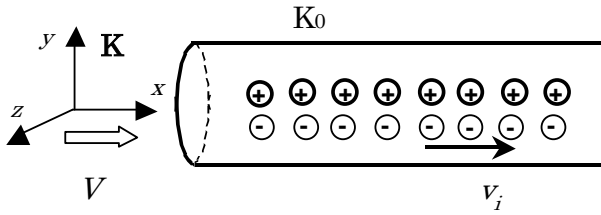


図3. 電流が流れている直線状導体のモデルと座標系.

ここで, 自由電子が速度 v_i で導体の直線方向に等速度運動している, つまり, 電流が流れているとする. K_0 系に対して速度 V で導体の直線方向に等速度運動する K 系において観測される電場と磁場は図2で求めた結果を用いて導出できる. K 系では, 金属イオンは V の速度で x 軸の負の方向に運動していると観測される. また, 自由電子は v_{Ki} で運動していると観測される. v_{Ki} は相対論における速度の合成法則から,

$$v_{Ki} = \frac{v_i - V}{1 + v_i V / c^2} \quad (7)$$

で与えられる. K 系において, 金属イオンと自由電子が点 (x, y, z) にはる電場 E と磁場 H は, それぞれについて, 図2の場合と同様にして求め, 重ね合わせの原理を用いると, 以下の式が得られる.

$$\left. \begin{aligned} E_x &= 0 \\ E_y &= \frac{e\rho y}{2\pi\epsilon_0(y^2+z^2)} \left(\frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-v_{Ki}^2/c^2}} \right) \\ E_z &= \frac{e\rho z}{2\pi\epsilon_0(y^2+z^2)} \left(\frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-v_{Ki}^2/c^2}} \right) \end{aligned} \right\} (8)$$

$$\left. \begin{aligned} H_x &= 0 \\ H_y &= \frac{e\rho z}{2\pi\mu_0(y^2+z^2)} \left(\frac{V}{\sqrt{1-V^2/c^2}} - \frac{v_{Ki}}{\sqrt{1-v_{Ki}^2/c^2}} \right) \\ H_z &= \frac{e\rho y}{2\pi\mu_0(y^2+z^2)} \left(\frac{-V}{\sqrt{1-V^2/c^2}} + \frac{v_{Ki}}{\sqrt{1-v_{Ki}^2/c^2}} \right) \end{aligned} \right\} (9)$$

これらの式の物理的な意味は, ローレンツ収縮によって電荷密度が変化するが, 金属イオンと自由電子の速度の違いによって電荷密度が異なるため相殺されなくなり, 電場が発生するということである. $v_i \ll c, V \ll c$ という条件で近似すると, 電場の y 成分は, (8)式より

$$E_y = \frac{e\rho y}{2\pi\epsilon_0(y^2+z^2)} \left(\frac{Vv_i}{c^2} - \frac{v_i^2}{2c^2} \right) \quad (10)$$

となる. ここで,

$$I = -e\rho v_i \quad (11)$$

と近似すれば, (9)式より

$$H_z = \frac{e\rho v_i y}{2\pi\mu_0(y^2+z^2)} = \frac{-Iy}{2\pi\mu_0(y^2+z^2)} \quad (12)$$

であり, $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ であることを用いれば,

$$E_y = -\mu_0 V H_z + \frac{1}{2} \mu_0 v_i H_z \quad (13)$$

が得られる. (13)式の第1項は, 従来知られているローレンツ力に対応している. このように, ローレンツ力は観測系が等速運動することによって電場が変化した結果, 出現するのである. 電場が変化することは, ローレンツ収縮によって電荷密度が変化したと観測されることによる. 第2項は, $V=0$ の場合にも存在し, 系の運動には関係しない電場である. $V=0$ では導体に固定された系となるが, 導体中の自由電子が v_i で等速運動しており, ローレンツ収縮を起こす. そのため, 金属イオンと電荷密度が異なり電場が発生する. これが第2項である. つまり, 電流が流れる導体外にある電荷が導体に対して静止していてもローレンツ力が働くことになる. ローレンツ力をローレンツ収縮による電荷密度の変化によると考えれば, 導体中に電流が流れるだけで電場が発生することになる. ローレンツ力をローレンツ収縮によって説明している文献[1, 4, 5]では, 電荷が静止している場合ローレンツ力は働かないことが述べられており, 異なった結論が得られたことになる.

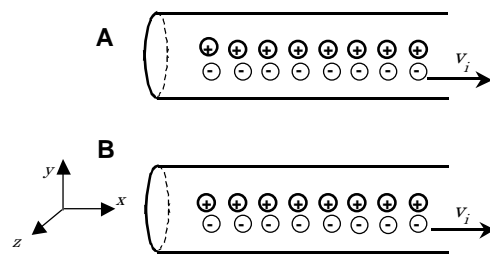


図4. 同一の電流が流れている2本の直線状導体.

次に, 第2章で述べた2本の直線導体間に働く力を導出する. 図4に示すように, xy 平面に平行に置かれた A, B, 2本の直線導体に同一方向で同一の電流が流れているとする. A の導体に働く力は, A 内の金属イオンが B の電流から受ける力と A 内の自由電子が B の電流から受ける力の和である. A 内の金属イオンが B の電流から受ける力(電場)は, (10)式において, $V=0, z=0$ とおき,

$$E_y = \frac{-\mu_0 e \rho v_i^2}{4\pi y} \quad (14)$$

で与えられる。A 内の自由電子が B の電流から受ける力(電場)も同じ結果となり、それらの和から、A の導体の単位長さあたりに働く力は

$$F_y = \frac{-\mu_0 (e \rho v_i)^2}{2\pi y} = -I \mu_0 H_z \quad (15)$$

となる。この結果は、電流の向きが x 軸の負の方向であることを考慮すれば(1)式に等しい。(15)式の導出では、(13)式の第2項のみが寄与している。これまでの文献[1, 4, 5]では、A 内の金属イオンが B の電流から受ける力は金属イオンが静止しているので存在せず、A 内の自由電子が B の電流から受ける力(電場)が(14)式の2倍となり、(15)式と同じ結果を得ている。A 内の自由電子が B 内の自由電子と同じ速度で運動するので、A 内の自由電子から見て B 内の自由電子は、運動していたものが静止するのでローレンツ膨張を起こすと考えている。しかし、物体が静止しているとき測定した長さが物体固有の長さであり、運動していると常にローレンツ収縮を起こして短くなるとする相対論と、上記の見方は相容れない。

5. 考察

前章では、電磁場のローレンツ変換によってローレンツ力を導出した。しかし、この結果は従来の理論と異なっている。異なる結論が得られる要因は、自由電子のローレンツ収縮の捉え方にある。ローレンツ力をローレンツ収縮によって説明しているこれまでの文献では、電流を構成する自由電子が等速運動するとき電荷密度は金属イオンと同一と考えている。つまり、導体に固定された系から見ると“自由電子はローレンツ収縮を起こさない”ことを仮定している。このように仮定することで、“外部にある電荷が導体に対して静止している場合、ローレンツ力は働かない”ことが導出される。文献[5]では、“金属イオンと自由電子は密度が同じ”であり、“そうでなければ金属球は導線に静止していても力を受けることになるし、そもそも時間が経つにつれて導線にドンドンと余剰の自由電子がたまる、あるいは減っていくことになってしまう”ことが述べられている。ここで、金属球とは導体外部にある静止した電荷であり、力を観測している系である。この観測系が等速運動すると導体内の金属イオンと自由電子がローレンツ収縮を起こすことからローレンツ力を導出しているのであるが、導体に固定された金属イオンから見て自由電子の密度が金属イオンと同じことが仮定さ

れているのである。そうでなければ自由電子の電荷量が時間とともに変化することを懸念している。しかし、ローレンツ収縮することで変化するのは密度であり、電荷は保存されているので電荷量が変化することはない。導体内の金属イオンと自由電子の密度が異なると両者に電氣的な力が働き密度を変化させるのではないかと考えられるかもしれないが、直線導体が発生する電場は導体直線に直交しており、直線方向に働く力は発生しない。そもそも金属球から見て電荷密度が同じであったとしても、自由電子からみると同じとはならないのである。現実の直線導体は有限の長さを持っており、電源に接続されている部分では、電子が加速度運動をするので慣性系ではなくなる。そのため、複雑な運動となることが予想されるが、電荷保存の法則が成り立つことが前提条件である。

直線導体において電流がない場合、金属イオンと自由電子が平衡状態にあり、それらの密度が同一であるという仮定は自然である。この状態から一定の電流を発生させたとき、自由電子がある過渡的な状態を経て等速運動へと移行する。このとき、自由電子の密度が金属イオンの系からどのように見えるかが問題である。これまでの文献[1, 4, 5]では、電流が流れた状態での自由電子は静止していたときと同じ密度を持つとしている。これは、静止していた物体がある一定の速度で運動してもその長さを変えないことを意味している。これを時空間で示すと、図5のようになる。例えば、静止していた電子列を時間 $t=0$ に運動させた場合を考える。ある時間 t_1 に列の長さを変えないで一定の速度で運動させるためには、各電子を決められた時間に同じ速度になるように同時に押すことが必要である。このような意図的な操作なしにその長さを一定に保ったまま運動させることが容易でないことは、右端まで力が働くには遅延が生じ電子全体が等速運動するまで各点で時間差が発生することから明らかである。特殊な操作なしに物体がその長さを変えずに運動することが可能であれば、光速を超える通信が可能になってしまう。

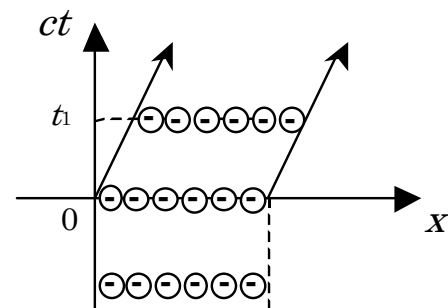


図5. 時空間座標系における電子列の運動。

電流値に比例して自由電子の速度が増大するのであるが、金属イオンから見て自由電子が常に同一の電荷密度を持つことは、可能であろうか。第 3 章で導出した運動する直線状電荷の電磁場では、電荷密度はローレンツ収縮を起こして変化する。ある系に対して自由電子がある速度 v で運動し、電流が存在することと、静止した自由電子を速度 $-v$ で運動する系から観測した場合に観測される電流は物理的に同等である。運動する物体の現象は、物体が静止しているときの現象にローレンツ変換という変数変換をすれば得られるというのが相対論である。ある一定の電流が流れた状態において金属イオンと自由電子の密度が同一であると仮定することは可能である。しかし、“自由電子が常に同一の電荷密度を持つ”ことは保証されない。電流がなく磁場も電場もない状態を出発点とし、電流を流すと自由電子がローレンツ収縮して(13)式の第 2 項で表わされる電場が発生すると考える方が単純である。ただし、現実的な電流では自由電子の速度 v が非常に小さいため、ほとんど観測されてこなかったという可能性がある。例えば、直径 2 mm の円形の断面を持つ銅線に 1A の電流を流したときの v は、高々、 1×10^{-2} mm/s である。 v が非常に小さいので、静止した外部電荷に働くローレンツ力を観測するためには特別な準備が必要である。電流を流した状態で常に電荷密度が中性になるという可能性も否定できない。導体中の自由電子は導体両端にかけられた電位差と内部抵抗により、一定の速度で運動しているものであり、金属イオンと相互作用している。第 3 章で示したローレンツ変換は、自由空間における慣性系の間で成り立つもので、電流を流す前後の状態に適用することはできない。以上の議論を明確にするためには、(13)式の第 2 項の効果を実験的に測定することが重要であり、現在計画中である。

電荷密度の見方に相違があるものの、ローレンツ力が運動する電荷のローレンツ収縮による電場の変化によることは確かである。このような捉え方は、磁場という物理量の見方を変える。根源的な力はクーロン力のみであり、ローレンツ力や磁場による力は電荷の運動による電場の変化に帰着できる。極論すれば、磁場は仮想的な場といえる。電磁場を記述する物理量として、電場と磁場が用いられているが、これらは 6 次元の変数である。一方、電磁場はベクトルポテンシャルとスカラーポテンシャルによって記述できる。これらは、合計 4 次元の変数である。つまり、電場と磁場を用いる記述は 2 次元だけ冗長になっている。しかし、磁場を用いないで電場だけでは記述できないことも確かである。また、スカラーポテンシャルは位置エネルギーとし

て物理的に捉えやすいが、ベクトルポテンシャルは物理的に捉えにくいことが難点である。

6. おわりに

2006 年度の卒業研究で、光ファイバジャイロスコープをとりあげた[6]。このジャイロの測定原理は一般相対性理論に基づいており、その文献調査を行う中で文献[5]を知った。そこには、ローレンツ力がローレンツ収縮から導出されることがわかりやすく説明されていた。相対論は光速に近い高速現象においてしか問題にならないという考え方は正しくなく、金属中の電流という遅い現象でも相対論的な効果が観測されることが述べられていた。ローレンツ力の起源がローレンツ収縮にあることは、電磁気学を原理的に理解する上できわめて重要なことと思われた。しかし、電流が流れた状態で電荷密度が中性であるとする考え方に疑問があり、ローレンツ変換によるローレンツ力の導出やローレンツ収縮についての考察を述べた。磁場が電子の運動によって発生することから、電荷が静止していてもローレンツ力が存在すると考えた方が単純で合理的である。この結論の実験的な検証は今後の課題である。本報告の目的は、電磁気学をよりわかりやすくできないか、ということであった。より原理的、論理的に理解するためには相対論から出発しなければならないが、相対論は決して容易ではない。本報告を端緒として、電磁気学をわかりやすくすることを検討していきたい。

謝辞

文献についてご教示いただいた森井 宜治教授に感謝します。

参考文献

- [1] 後藤 尚久：電磁気学，コロナ社，2002.
- [2] 砂川 重信：理論電磁気学，p. 25，紀伊国屋書店，1973.
- [3] エリ・デ・ランダウ，イエ・エム・リフシッツ：場の古典論，東京図書，1964.
- [4] R. P. Feynman, R. B. Leighton, and M. Sands: Lectures on Physics, vol. II, pp. 13.6 – 13.11, 1964.
- [5] 松田 卓也, 木下 篤哉: 相対論の正しい間違え方, pp. 105-110, 丸善, 2001.
- [6] 宮松 圭芳: 半導体レーザーを用いた光ファイバジャイロの研究, 平成 18 年度沼津高専卒業研究報告, 2007.